Mathis P. Bohnenberger

46

Anfangsgründe

der

höheren

Analysis

Bayerische
Staatsbibliothek
München

J. G. F. Bohnenberger,

Professor zu Tübingen.

R

Mit drey Kupfertafeln.

Tübingen

in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung.

1811.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Tübingen,
gedrukt mit Hopferischen Schriften.

Vorrede.

Unter den verschiedenen Vorstellungsarten der Differentialrechnung habe ich diejenige gewählt, welche sich auf die Gränzen der Verhältnisse der zusammengehörigen Veränderungen oder Differenzen veränderlicher Größen gründet. Zwar entsteht hiebey gleich anfangs die Schwierigkeit, daß das veränderliche Verhältniß dieser Differenzen sich im Allgemeinen einem gewißen gegebenen von der Größe der Differenzen unabhängigen Verhältniß während ihrer Verminderung nur nähert, ohne es jemals, wie klein auch die Differenzen genommen werden mögen, zu erreichen, so daß es scheint, als ob man genöthigt sey, die Differenzen der veränderlichen Größen in einem Zustande zu betrachten, da sie aufhören Größen zu seyn. Man kann aber, um diese Schwierigkeit zu heben, eine der Differenzen nach Belieben nehmen, und eine andere Größe so bestimmen, daß das Verhältniß dieser zwey Größen dem Gränzverhältniß der zusammengehörigen Differenzen gleich wird. Diese so bestimmten Größen, deren Verhältniß von dem der Differenzen beständig verschieden ist, bekommen eben deswegen auch einen eigenen Namen, und heißen Differentiale. Bey dieser Untersuchung ist es nicht nöthig, die Größen, deren Verhältniß

man betrachtet, verschwinden zu lassen, und es ist genug, wenn man aus dem veränderlichen Verhältniß ein constantes ableiten kann, welches so beschaffen ist, daß das veränderliche Verhältniß der Differenzen durch die Verminderung der lezteren größer oder kleiner gemacht werden kann, als jedes gegebene Verhältniß, welches kleiner oder größer ist, als jenes constante, je nachdem das Differenzverhältniß mit den Differenzen zugleich wächst, oder abnimmt. Der Exponent des Differentialverhältnisses wird eine neue gegebene Function einer veränderlichen Größe seyn, deren Differenz man auf ähnliche Weise wird bestimmen, und aus welcher man das Differentialverhältniß dieser neuen Function wird ableiten können, wodurch man auf die zweyten Differentiale kommt u. s. w.

Indessen will ich es gerne zugeben, daß man von anderen Definitionen der Differentiale ausgehen, und zu denselben Resultaten gelangen könnte. Vorausgesezt, daß sich die Differenz einer jeden Function einer veränderlichen Größe in eine Reihe entwickeln lasse, welche nach den in der Reihe der natürlichen Zahlen von der Einheit an wachsenden Potenzen der Differenz der Functionalgröße fortgeht, und in welcher die Coefficienten dieser Potenzen Functionen der veränderlichen Größe allein sind, kann man auch das erste Glied dieser Reihe das Differential der Function, und den durch die Division desselben mit der Differenz der Functionalgröße erhaltenen Quotienten den Exponenten des Differentialverhältnisses nennen. Man wird sodenn zeigen, daß die Coefficenten der folgenden Glieder aus den unmittelbar vorhergehenden nach demselben Gesez abgeleitet werden können, wie der Coefficient des ersten Glieds aus der vorgegebenen Function, wenn man sie noch

überdiß beziehungsweise mit den Zahlen 2, 3, 4 u. s. w. dividirt. Diese Darstellungsart ist nur der Benennung nach von derjenigen verschieden, welche La Grange in seiner Theorie der Functionen gewählt hat, wo er diejenige Function, welche indessen der Exponent des Differentialverhältnisses hieß, die erste abgeleitete Function, den Exponenten des zweyten Differentialverhältnisses die zweyte abgeleitete Function u. s. w. nennt. Allein bey der Anwendung auf die Geometrie und Mechanik, und im Allgemeinen auf solche Functionen, wo das Gesez der gegenseitigen Abhängigkeit der veränderlichen Größen noch nicht gegeben ist, beweißt er seine Sätze auf eine ebenfalls nur dem Namen nach von der Methode der Gränzen verschiedene Art. Ich hielt es daher für schiklich, gleich Anfangs den Begriff von Gränzverhältniß zum Grund zu legen, mit welchem ohnehin die Anfänger schon durch die Schriften Euklids und Archimeds, wenn gleich diese Benennung nicht darinn vorkommt, bekannt gemacht werden, und zwar um so mehr, weil ich voraussahe, daß auch bey der gewöhnlichen Methode der Gränzen von den wichtigen Sätzen würde Gebrauch gemacht werden können, mit welchen La Grange in seiner Théorie des fonctions analytiques und in seinen Leçons sur le calcul des fonctions die höhere Analysis bereichert hat, ohne viele Aenderungen in den Beweißen, die Aenderung der Terminologie abgerechnet, zu machen.

Daß schon in der Differentialrechnung Anwendungen auf Rectificationen, Quadraturen u. s. w. vorkommen, wird man nicht gegen die Methode finden, da in dem zweyten Capitel der Einleitung der Zusammenhang zwischen der Differential- und Integral-Rechnung gezeigt worden ist. Ich

hoffte dadurch die aufgestellten Sätze deutlicher, und den Vortrag unterhaltender zu machen. Der Anfänger wird denn bald das Bedürfniß fühlen, eine Sammlung von Integralformeln zu haben, in welcher er bey vorkommenden verwickelten Integrationen sich Raths erholen kann. Eine kleine Sammlung dieser Art enthält die angehängte Integral-Rechnung. Vorzüglich brauchbar hiezu sind die Integraltafeln von Meier Hirsch. (Berlin, 1810.).

Das etwas starke Verzeichniß von Druck- und Schreib-Fehlern ist aus Gelegenheit von Vorlesungen entstanden, welche während des Drucks über die Anfangsgründe gehalten worden sind.

Tübingen den 17. Sept. 1811.

Bohnenberger.

Inhaltsanzeige.

Einleitung.

		Seite
I.	Cap. Von dem Binomialtheorem. §. 1—3.	1.
II.	Cap. Von der Differential- und Integral-Rechnung überhaupt. §. 4—21.	10.

Differentialrechnung.

I.	Cap. Differentiale der einfachen Functionen. §. 22—34.	47.
II.	Cap. Differentiale der zusammengesezten Functionen einer veränderlichen Größe. §. 35--43.	67.
III.	Cap. Ausdehnung des Tayloriſchen Satzes auf Functionen mehrerer veränderlichen Größen. §. 44—49.	86.
IV.	Cap. Von den gröſten und kleinſten Werthen gegebener Functionen. §. 50—62.	99.
V.	Cap. Von den Tangenten krummer Linien. §. 63—78.	127.
VI.	Cap. Von den Krümmungskreiſen und Evoluten. §. 79—90.	165.
VII.	Cap. Von der Quadratur und Rectification krummer Linien, und von der Beſtimmung der Oberfläche und des Inhalts runder Körper. §. 91—100.	192.
VIII.	Cap. Von der Beſtimmung der Tangenten und der Krümmungshalbmeſſer krummer Linien, von ihrer Quadratur, und von der Beſtimmung der Oberflächen und des Inhalts runder Körper, wenn die Ordinaten von einem Punkt ausgehen. §. 101—104.	218.

Integralrechnung.

Seite

I. Cap. Von der Integration rationaler Functionen einer veränderlichen Größe. §. 105—118. 233.

II. Cap. Von der Integration irrationaler Functionen einer veränderlichen Größe. §. 119—137. 255.

III. Cap. Von der Integration der Kreisfunctionen. §. 138—146. 283.

IV. Cap. Von der Integration der logarithmischen und exponentiellen Functionen. §. 147—149. 295.

V. Cap. Von den Integrationen durch Annäherung. §. 150—153. 302.
Von der Integration der höheren Differentiale.
§. 154. 309.

VI. Cap. Von der Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit zwey veränderlichen Größen.
§. 155—173. 310.

VII. Cap. Von der Integration der Differentialgleichungen der zweyten Ordnung. §. 174—180. 341.

Einleitung.

Erstes Capitel.

Von dem Binomialtheorem.

§. 1. Man verſteht unter dem Newtoniſchen Binomialtheorem den allgemeinen Ausdruk irgend einer Potenz eines Binomiums $a+b$, der Exponent mag eine poſitive oder negative ganze oder gebrochene Zahl ſeyn. Wenn der Exponent eine poſitive ganze Zahl iſt; ſo hat man nach den Regeln der Algebra

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

u. ſ. w., welche Ausdrücke, wenn man $a\left(1+\frac{b}{a}\right)$ ſtatt $a+b$, und $\frac{b}{a}=z$ ſetzt, ſich in folgende verwandeln

$$(a+b)^2 = a^2(1+2z+z^2)$$
$$(a+b)^3 = a^3(1+3z+3z^2+z^3)$$
$$(a+b)^4 = a^4(1+4z+6z^2+4z^3+z^4)$$

Man ſetze nach der Analogie dieſer Ausdrücke, wenn der Exponent irgend eine poſitive ganze Zahl m iſt,

$$(1+z)^m = 1+mz+A''z^2+A'''z^3+A^{IV}z^4+\ldots$$
$$\vdots$$
$$+A^{(r)}z^r+\ldots mz^{m-1}+z^m;$$

ſo erhält man, wenn man beyderſeits mit $1+z$ multiplicirt,

$$(1+z)^{m+1} = 1+mz+A''z^2+A'''z^3+A^{IV}z^4+\ldots$$
$$+z+mz^2+A''z^3+A'''z^4+\ldots$$
$$\vdots$$
$$+A^{(r)}z^r+\ldots+mz^{m-1}+z^m$$
$$+A^{(r-1)}z^r+\ldots\quad+mz^m+z^{m+1}$$
$$= 1+(m+1)z+(A''+m)z^2+(A'''+A'')z^3+(A^{IV}+A''')z^4+\ldots$$
$$+(A^{(r)}+A^{(r-1)})z^r+\ldots+(m+1)z^m+z^{m+1}.$$

Die Reihe behält also die angenommene Form für jede nächstfolgende um eine Einheit höhere Potenz von $1+z$, und daher ist allgemein

1.) $(1+z)^m = 1 + mz + A''z^2 + A'''^3 + \ldots + A^{(r)}z^r + \ldots + mz^{m-1} + z^m$,

und, wenn die Coefficienten von $z, z^2, z^3 \ldots z^r$ in dem Ausdruk der $m$ten Potenz von $1+z$ beziehungsweise m, A'', A''', $\ldots$ $A^{(r)}$ sind; so sind

2.) Die Coefficienten von $z, z^2 \ldots z^r$ in dem Ausdruk der $(m+1)$ten Potenz von $1+z$ beziehungsweise $m+1$, $A''+m, \ldots A^{(r)}+A^{(r-1)}$.

Weil $1+z = z\left(1+\frac{1}{z}\right)$; so ist auch

$(1+z)^m = z^m\left(1+\frac{1}{z}\right)^m$, oder nach n. 1.

$$= z^m\left(1 + m.\frac{1}{z} + A''.\frac{1}{z^2} + A'''.\frac{1}{z^3} + \ldots + A^{(r)}\frac{1}{z^r} + \ldots m.\frac{1}{z^{m-1}} + \frac{1}{z^m}\right)$$

$$= z^m + mz^{m-1} + A''z^{m-2} + A'''z^{m-3} + \ldots + A^{(r)}z^{m-r} + \ldots + mz + 1.$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdruks mit n. 1. ergiebt sich, daß die Coefficienten aller von dem ersten und lezten gleich weit entfernten Glieder einander gleich seyn müssen.

Da nun für $m = 0$ die Größe $(1+z)^m = 1$ wird; so muß die Reihe n. 1. so beschaffen seyn, daß für $m = 0$ die Coefficienten A', A''' $\ldots$ $A^{(r)}$ $\ldots$ verschwinden. Mithin müßen alle diese Coefficienten den Factor m enthalten. Ferner müßen für $m = 1$ ebendiese Coefficienten verschwinden, und daher müßen sie den Factor $m-1$ enthalten. Ebenso müßen für $m = 2$ die Coefficienten A''', A^{IV} und alle folgende verschwinden, und daher den Factor $m-2$ enthalten. Allgemein müßen für $m = r-1$ die Coefficienten $A^{(r)}$, $A^{(r+1)}$ und alle folgenden verschwinden, und daher den Factor $m-(r-1)$ enthalten. Demnach muß A' den zusammengesezten Factor $m(m-1)$, A''' den Factor $m(m-1)(m-2)$, und allgemein $A^{(r)}$ den Factor $m(m-1)(m-2)\ldots(m-(r-1))$ enthalten. Für

$m=r$ verwandelt sich dieser Factor in $r(r-1)(r-2)\ldots 1$, und $A^{(r)}$ muß in diesem Fall $=1$ werden; folglich wird man haben

$$A^{(r)} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(r-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ r.},$$

$$\text{und } (1+z)^m = 1+mz+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}z^3+\ldots.$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-(r-2))}{1\ .\ 2\ldots(r-1)}z^{r-1}$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))}{1\ .\ 2\ldots r}z^r+\&c.$$

Wirklich findet sich, daß dieser Ausdruk richtig ist für $m=1, 2, 3$. Vermöge n. 2. ist aber für die $(m+1)$te Potenz von $1+z$

der Coefficient von $z = m+1$,

der Coefficient von $z^2 = \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}+m = \frac{m}{1.2}(m-1+2) = \frac{(m+1)m}{1\ .\ 2}$

der Coefficient von $z^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}$,

$$= \frac{m(m-1)}{1.2.3}(m-2+3) = \frac{(m+1)m(m-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

und allgemein

der Coefficient von $z^r = \frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))}{1\ .\ 2\ \ldots\ r}+\frac{m(m-1)\ldots(m-(r-2))}{1\ .\ 2\ \ldots\ (r-1)}$,

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-(r-2))}{1\ .\ 2\ .\ \ldots\ r}(m-(r-1)+r),$$

$$= \frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m+1-(r-1))}{1\ .\ 2\ \ldots\ r};$$

und eben diesen Ausdruk erhält man, wenn man in dem vorhergehenden statt m sezt $m+1$; folglich ist die für $(1+z)^m$ angegebene Reihe richtig, wenn m eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet. Sezt man in derselben wiederum $\frac{b}{a}$ statt z, und multiplicirt sie mit a^m; so erhält man

$$(a+b)^m = a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}a^{m-2}b^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^{m-3}b^3+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))}{1\ .\ 2\ldots r}a^{m-r}b^r+\ldots+b^m.$$

§. 2. Wenn man folgende zwey Reihen

$$P = 1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \ldots + A^{(r-1)}z^{r-1} + A^{(r)}z^r + A^{(r+1)}z^{r+1} + \&c.$$
$$Q = 1 + B'z + B''z^2 + B'''z^3 + \ldots + B^{(r-1)}z^{r-1} + B^{(r)}z^r + B^{(r+1)}z^{r+1} + \&c.$$

mit einander multiplicirt; so erhält man

$$\begin{aligned}
PQ = {} & 1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \ldots \\
& + B'z + A'B'z^2 + A''B'z^3 + \ldots \\
& + B''z^2 + A'B''z^3 + \ldots \\
& + B'''z^3 + \ldots \\
& + A^{(r)}z^r + A^{(r+1)}z^{r+1} + \&c. \\
& + A^{(r-1)}B'z^r + A^{(r)}B'z^{r+1} + \&c. \\
& + A^{(r-2)}B''z^r + A^{(r-1)}B''z^{r+1} + \&c. \\
& + A^{(r-3)}B'''z^r + A^{(r-2)}B'''z^{r+1} + \&c. \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& + A'B^{(r-1)}z^r + A''B^{(r-1)}z^{r+1} + \&c. \\
& + B^{(r)}z^r + A'B^{(r)}z^{r+1} + \&c. \\
& \qquad + B^{(r+1)}z^{r+1} + \&c.
\end{aligned}$$

Es seyen m und n beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahlen, und

$A' = m$

$A'' = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$, und daher $2A'' = (m-1)A'$,

$A''' = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $3A''' = (m-2)A''$,

$\vdots$

$A^{(r)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}$, $rA^{(r)} = (m-(r-1))A^{(r-1)}$,

$A^{(r+1)} = \frac{m(m-1)\ldots(m-r)}{1 \cdot 2 \ldots r(r+1)}$, $(r+1)A^{(r+1)} = (m-r)A^{(r)}$,

Ebenso $B' = n$,

$B'' = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, $2B'' = (n-1)B'$,

$\vdots$

$(r+1)B^{(r+1)} = (n-r)B^{(r)}$;

so sind

$$\begin{aligned}
(r+1)A^{(r+1)} &= (m-r)A^{(r)}, \\
(r+1)A^{(r)}B' &= rA^{(r)}B' + A^{(r)}B', \\
&= (m-(r-1))A^{(r-1)}B' + nA^{(r)}, \\
(r+1)A^{(r-1)}B'' &= (r-1)A^{(r-1)}B'' + 2A^{(r-1)}B''
\end{aligned}$$

$$= (m-(r-2))\,A^{(r-2)}B'' + (n-1)\,A^{(1-r)}B',$$

$$(r+1)\,A^{(r-2)}B''' = (r-2)\,A^{(r-2)}B''' + 3\,A^{(r-2)}B''',$$

$$= (m-(r-3))\,A^{(r-3)}B''' + (n-2)\,A^{(r-2)}B'',$$

$$\vdots$$

$$(r+1)\,A^{(r+1-k)}B^{(k)} = (r+1-k)\,A^{(r+1-k)}B^{(k)} + k\,A^{(r+1-k)}B^{(k)},$$

$$= (m-(r-k))\,A^{(r-k)}B^{(k} + (n-(k-1)\,A^{(r+1-k)}B^{(k-1)},$$

$$(r+1)\,A^{(r-k)}B^{(k+1)} = (r-k)\,A^{(r-k)}B^{(k+1)} + (k+1)\,A^{(r-k,}B^{(k+1)}$$

$$= (m-(r-k-1))\,A^{(r-1-k)}B^{(k+1)} + (n-k)\,A^{(r-k)}B^{(k)},$$

$$\vdots$$

$$(r+1)\,A'B^{(r)} = A'B^{(r)} + rA'B^{(r)},$$

$$= mB^{(r)} + (n-(r-1))\,A'B^{(r-1)},$$

$$(r+1)\,B^{(r+1)} = \ldots\ldots (n-r)\,B^{(r)}.$$

---

daher $(r+1)(A^{(r+1)} + A^{(r)}B' + \ldots + B^{(r+1)})$

$= (m+n-r)(A^{(r)} + A^{(r-1)}B' + \ldots + B^{(r)})$, und

$A^{(r+1)} + A^{(r)}B' + \ldots + B^{(r+1)}$

$$= \frac{m+n-r}{r+1}(A^{(r)} + A^{(r-1)}B' + \ldots + B^{(r)}).$$

Für die angenommene Form der Coefficienten von z in den Reihen P und Q wird also der Coefficient von z^{r+1} in dem Produkt $P.Q$ aus dem Coefficienten von z^r gefunden, wenn man den leztteren mit $\frac{m+n-r}{r+1}$ multiplicirt.

Nun ist in dem Ausdruk des Produkts $P.Q$ der Coefficient von $z = A' + B' = m+n$

folglich ist der Coefficient von $z^2 = \frac{m+n-1}{2}(m+n)$, für $r=1$,

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}.$$

Hieraus findet sich ferner für $r=2$

der Coefficient von $z^3 = \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$

Sey allgemein der Coefficient von z^r

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-(r-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r};$$

so ist vermöge des bewiesenen der Coefficient von z^{r+1}

$$= \frac{m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-(r-1)(m+n-r)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots r.(r+1)},$$

welchen Ausdruk man aus dem vorhergehenden erhält, wenn

man in demselben statt r sezt $r+1$. Daher ist

1.) das Produkt

$$\text{von } 1+mz+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$$

$$\text{in } 1+nz+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$$

$$=1+(m+n)z+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{(m+n)\ldots(m+n-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$$

Man sezze $n=m$; so erhält man

$$\left(1+mz+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{m\ldots(m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.\right)^2$$

$$=1+2mz+\frac{2m(2m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{2m\ldots(2m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$$

also ferner $(1+mz+\ldots)^3=(1+mz\ldots)(1+2mz\ldots)$, d. i. nach n. 1., wenn man $n=2m$ sezt,

$$=1+3mz+\frac{3m(3m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{3m\ldots(3m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r.$$

Allgemein ist, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet

2.) $$\left(1+mz+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{m\ldots(m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}\right)^k$$

$$=1+kmz+\frac{km(km-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{km\ldots(km-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$$

Denn es ist $(1+mz+\ldots)^{k+1}=(1+mz+\ldots)(1+kmz+\ldots)$, d. i. nach n. 1. wenn $n=km$ sezt,

$$=1+(k+1)mz+\frac{(k+1)m((k+1)m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots$$

$$+\frac{(k+1)m\ldots((k+1)m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$$

welcher Ausdruk aus dem vorhergehenden entsteht, wenn man in demselben $k+1$ statt k sezt.

Man sezze in n. 2. die Zahl $m=1$; so findet sich

3.) $$(1+z)^k=1+kz+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{k(k-1)\ldots(k-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$$

übereinstimmend mit dem vorhergehenden §.

Es ist, wenn k und m positive Zahlen sind

$$\sqrt[k]{(1+z)^m} = (1+z)^{\frac{m}{k}} = 1 + \frac{m}{k}z + \frac{\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}-1\right)}{1\cdot 2}z^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{m}{k}-(r-1)\right)}{1\cdot 2\ldots r}z^r + \&c.$$

Denn es ist $\left(1+\frac{m}{k}z+\frac{\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}-1\right)}{1\cdot 2}z^2+\ldots\right)^k = 1+mz+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\&c.$ (n. 2.)

$= (1+z)^m$ (n. 3.)

Also ist für eine beliebige positive ganze oder gebrochene Zahl p

4.) $(1+z)^p = 1+pz+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{p(p-1)\ldots(p-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$

Es ist $(1+z)^{-p}$

$= 1+\frac{-p}{1}z+\frac{-p(-p-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots+\frac{-p(-p-1)\ldots(-p-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$

Denn nach n. 1. ist

$\left(1+\frac{-p}{1}z+\frac{-p(-p-1)}{1\cdot 2}z^2+\&c.\right)\left(1+\frac{p}{1}z+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}z^2+\&c.\right.$

$= 1+\frac{p-p}{1}z+\frac{(p-p)(p-p-1)}{2\cdot 2}z^2+\&c. = 1.$

Folglich ist $1+\frac{-p}{1}z+\frac{-p(-p-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots = \frac{1}{1+\frac{p}{1}z+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots}$

$= \frac{1}{(1+z)^p}$ (n. 4.)

$= (1+z)^{-p}.$

Daher ist, wenn m eine beliebige positive oder negative ganze oder gebrochene rationelle Zahl bezeichnet

5.) $(1+z)^m = 1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2+\ldots,+\frac{m\ldots(m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}z^r+\&c.$

Wenn z negativ ist; so bekommen diejenigen Glieder, welche ungerade Potenzen von z enthalten, das Zeichen $-$.

Es ist also auch

6.) $(a\pm b)^m = a^m \pm \frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2\pm\ldots.$

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}\, a^{m-r} b^r + \&c.\ *)$$

Da $\frac{x}{x+y} = 1 - \frac{y}{x+y}$; so ist $\frac{x^m}{(x+y)^m} = \left(1 - \frac{y}{x+y}\right)^m =$

$$1 - m\frac{y}{x+y} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{y^2}{(x+y)^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{y^3}{(x+y)^3} + \&c.$$

und daher

$$7.)\ (x+y)^{-m} = x^{-m}\left(1 - \frac{m}{1}\frac{y}{x+y} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{y^2}{(x+y)^2} - \ldots. \pm \frac{m\ldots(m-(r-1))}{1\cdot 2\ldots r}\frac{y^r}{(x+y)^r} + \&c.\right),$$

wo das obere oder untere Zeichen gebraucht wird, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Man kehre die Zeichen von m um, so erhält man

$$8.)\ (x+y)^m = x^m\left(1 + \frac{m}{1}\frac{y}{x+y} + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\frac{y^2}{(x+y)^2} + \ldots. + \frac{m\ldots(m+r-1)}{1\cdot 2\ldots r}\frac{y^r}{(x+y)^r} + \&c.\right)$$

Man setze $x+y=b$, und $x=1$; so wird

$$9.)\ b^m = 1 + \frac{m}{1}\frac{b-1}{b} + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \ldots. + \frac{m\ldots(m+r-1)}{1\cdot 2\ldots r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r + \&c.$$

§. 3. Was nun die Anwendung des Binomialtheorems betrifft; so ist folgendes zu bemerken.

Wenn erstlich der Exponent m eine positive ganze Zahl ist; so bricht die Reihe immer ab, und besteht aus $m+1$ Gliedern. In diesem Fall erhält man also die $m$te Potenz von $a+b$ genau. In den übrigen Fällen bricht die Reihe nicht ab, und sie ist nur alsdenn brauchbar, wenn sie convergirt. Um dieses zu untersuchen, sey

zweytens der Exponent m ein positiver unächter Bruch. Es seyen $A^{(k)}$, $A^{(k+1)}$ die Coefficienten derjenigen Glieder,

*) Vergl. Eulers Beweis in den Comment. novis Petrop. T. XIX. 1774. Seegner in den Mém. de Berlin. 1777. Busse Beyträge zur Mathem. und Physik. Dessau 1785. St. 2. *l'Huilier* Princip. calc. diff. et integr. expositio. *Tubingae* 1795. pag. V. *Rothe* Theorema binomiale univ. demonstr, *Lipsiae*. 1796.

welche die $k$te und $(k+1)$te Potenz von b enthalten; so ist vermöge des Gesetzes der Binomialcoefficienten (§. 2.)

$A^{(k+1)} = \frac{m-k}{k+1} A^{(k)}$, und daher, wenn die positive ganze Zahl k zunächst kleiner als m ist, $\frac{m-k}{k+1}$ ein ächter Bruch fer- ner ist

$$A^{(k+2)} = \frac{m-k-1}{k+2} A^{(k+1)} = -\frac{1-(m-k)}{k+2} A^{(k+1)},$$

und allgemein

$$A^{(k+r+1)} = \frac{m-k-r}{k+r+1} A^{(k+r)} = -\frac{r-(m-k)}{k+r+1} A^{(k+r)}.$$

Die Coefficienten nehmen also von dem Coefficienten $A^{k)}$ an beständig ab, und die Reihe convergirt, wenn $b < a$ ist, von dem Glied an, welches b^k enthält, geschwinder als eine geometrische Progreßion, deren Exponent $= \frac{b}{a}$ ist.

Drittens sey m eine negative ganze oder gebrochene Zahl, und größer als die Einheit; so ist

$$\frac{A^{(r+1)}}{A^{(r)}} = \frac{-m-r}{r+1} = -\left(1+\frac{m-1}{r+1}\right);$$

$$\frac{A^{(r+2)}}{A^{(r+1)}} = \frac{-m-r-1}{r+2} = -\left(1+\frac{m-1}{r+2}\right).$$

In diesem Fall wachsen also die Coefficienten beständig, aber, weil $\frac{m-1}{r+1} > \frac{m-1}{r+2}$ ist, langsamer als in einer geome- trischen Progreßion. Der Coefficient von b^2 ist also klei- ner als m^2, und um so mehr der Coefficient von b^3 klei- ner als m^3 u. s. w. Folglich convergirt die Reihe geschwin- der, als eine geometrische Progreßion, deren Exponent $= \frac{b}{a}$ ist, wenn $mb < a$ ist.

Viertens sey m ein negativer ächter Bruch. Da $A^{(r+1)} = \frac{-m-r}{r+1} A^{(r)} = -\frac{r+m}{r+1} A^{(r)}$ und $r+m < r+1$ ist für $m < 1$; so nehmen die Coefficienten beständig ab, und die Reihe convergirt, wenn $b < a$ ist, geschwinder als eine geo- metrische Progreßion, deren Exponent $= \frac{b}{a}$ ist.

Zweytes Capitel.

Von der Differential- und Integral-Rechnung überhaupt.

§. 4. Jede veränderliche Größe y, welche von einer oder mehreren veränderlichen Größen x, z u. s. w. so abhängt, daß sie mit x, z zugleich sich verändert, heißt eine Function der lezteren. So sind z. B. ax^m, $\surd x$, b^x, $a\,\mathrm{Lg}.\,x$, $c\,\mathrm{Sin}.\,x$, Functionen von x. Im allgemeinen bezeichnet man sie mit Fx, fx, Φx u. s. w. wo die Buchstaben F, f, Φ keine Factoren bezeichnen, sondern eine ähnliche Bedeutung haben, wie $\surd$, Lg, Sin. u. s. w.

Wenn eine veränderliche Größe eine Function mehrerer veränderlichen Größen x, z zugleich ist, schreibt man $F(x, z)$, und wenn sie eine Function der Summe oder Differenz derselben ist, $F(x \pm z)$. Diejenigen in den Ausdrücken der Function vorkommende Größen, welche beständig einerley Werth behalten, indem man die übrigen sich verändern läßt, heißen unveränderliche oder constante Größen. Die Veränderung, welche eine veränderliche Größe leidet, bezeichnet man durch das vorgesezte Zeichen Δ, und man nennt die unbestimmte Zunahme oder Abnahme der veränderlichen Größe ihrer Differenz.

Wenn nun zwey veränderliche Größen von einander abhängen, oder eine derselben eine Function der anderen ist; so werden auch ihre zusammengehörige Veränderungen oder Differenzen gewiße Beziehungen auf einander haben, welche von der Beschaffenheit der Function abhängen.

Sey 1.) $y = a + bx$, und $y + \Delta y$ der Werth, welchen y erhält, wenn man statt x sezt $x + \Delta x$; so wird man haben

$$y + \Delta y = a + b(x + \Delta x) = a + bx + b\Delta x,$$

und $\Delta y = b\Delta x$.

Sey 2.) $y = a + bx^m$;

so ist $y + \Delta y = a + b(x + \Delta x)^m$,

$$= a + bx^m + mbx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} bx^{m-2}\Delta x^2 + \&c.\ (\S.\ 2.\ n.\ 3.)$$

$$\Delta y = mbx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} bx^{m-2}\overline{\Delta x}^2 + \&c.$$

Sey 3.) $y = (x-a)\sqrt{x-b}$;

so ist $y + \Delta y = (x+\Delta x-a)\sqrt{x+\Delta x-b} = (x+\Delta x-a)(x+\Delta x-b)^{\frac{1}{2}}$.

Betrachtet man $x-b$ als den ersten, und Δx als den zweyten Theil eines Binomiums, und entwickelt den zweyten Factor mittelst des Binomialtheorems; so findet sich, wenn man diese Reihe mit $x+\Delta x-a$ multiplicirt, und alles nach den Potenzen von Δx ordnet,

$$y+\Delta y = (x-a)\sqrt{x-b} + \left(\frac{x-a}{2\sqrt{x-b}} + \sqrt{x-b}\right)\Delta x$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{x-b}}\left(\frac{x-a}{4(x-b)} - 1\right)\overline{\Delta x}^2 + \&c.$$

Sey $y =$ irgend einer Function Fx von x; so wird man haben
$y+\Delta y = F(x+\Delta x)$. Da nun für $\Delta x = 0$ die veränderliche Größe $y = Fx$ werden muß; so muß die Entwiklung von $F(x+\Delta x)$ in eine nach den Potenzen von Δx geordnete Reihe den anfänglichen Werth Fx der Function zum ersten Glied haben. Die übrigen Glieder werden mit Δx zugleich verschwinden, und daher Potenzen von Δx mit positiven Exponenten enthalten müßen. Man nehme alle diejenigen Glieder zusammen, welche einerley Potenz von Δx enthalten; so wird man haben $F(x+\Delta x) = Fx + P.\overline{\Delta x}^m + Q.\overline{\Delta x}^n + \&c.$ wo die Coefficienten P, Q, u. s. w. vermöge der Entwiklung kein Δx enthalten, aber von der Beschaffenheit der Function abhängen, und ebenfalls Functionen von x seyn werden. Man setze $z+\Delta x$ statt Δx; so wird

$$F(x+z+\Delta x) = Fx + P(z+\Delta x)^m + Q(z+\Delta x)^n + \&c.$$

das ist, wenn man nach dem Binomialtheorem entwickelt,

$$F(x+z+\Delta x) = Fx + P\left(z^m + \frac{m}{1}z^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^{m-2}\overline{\Delta x}^2 + \&c.\right)$$
$$+ Q\left(z^n + \frac{n}{1}z^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^{n-2}\overline{\Delta x}^2 + \&c.\right)$$
$$+ \&c.$$

oder, weil $Fx + P.z^m + Q.z^n + \&c. = F(x+z)$ ist (Voraussf.),

$$F(x+z+\Delta x) = F(x+z) + (mPz^{m-1} + nQz^{n-1} + \&c.)\,\Delta x + \left(\frac{m(m-1)}{1\,.\,2} Pz^{m-2} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} Qz^{n-2} + \&c.\right)\overline{\Delta x}^2 + \&c.$$

Wenn also in der Reihe, welche die Differenz einer Function einer veränderlichen Größe x ausdrükt, die Exponenten von Δx in einer anderen Ordnung, als nach der Reihe der natürlichen Zahlen von der Einheit an auf einander folgten; so könnte dieß nur bey bestimmten Werthen von x statt finden, weil sie für einen anderen Werth $x+z$ von x die Form $P\Delta x + P\overline{\Delta x}^2 + \&c.$ annimmt, und z. B. dasjenige Glied, welches die erste Potenz von Δx enthält nur alsdenn independent von dem Werth von Δx verschwindet, wenn $mPz^{m-1} + nQz^{n-1} = 0$ wird, und z einen der Werthe bekommt, welche dieser Gleichung Genüge leisten. Ebenso wird das zweyte Glied nur alsdenn wegfallen, wenn $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2} Pz^{m-2} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} Qz^{n-2} = 0$ wird, und z einen der Werthe erhält, welche dieser Gleichung Genüge leisten, u. s. w. Daher ist im Allgemeinen $F(x+\Delta x) = Fx + P'.\Delta x + P''.\overline{\Delta x}^2 + P'''.\Delta x^3 + \&c.$ wo P', P'', P''' u. s. w. Functionen von x sind, und die Reihe weicht nur alsdenn von dieser Form ab, wenn x besondere Werthe erhält *).

In Beziehung auf das dritte Beyspiel wird für $x = b$ der Werth der veränderlichen Größe y oder $Fx = 0$, und die Coefficienten von Δx, Δx^2, werden unendlich, zum Anzeigen, daß die für $y+\Delta y$ gefundene Reihe auf diesen besonderen Fall nicht angewendet werden könne. Sezt man aber in dem unentwickelten Ausdruk von $y+\Delta y$ die veränderliche Größe $x = b$; so erhält man für diesen besonderen Fall

$$\Delta y = (b+\Delta x-a)\sqrt{b+\Delta x-b},$$
$$= (b-a)\,\overline{\Delta x}^{\frac{1}{2}} + \overline{\Delta x}^{\frac{3}{2}}$$

Man sezze nun $z+\Delta x$ statt Δx; so erhält man auf die vorhin gezeigte Art, wenn man unter $F(b+z+\Delta x)$,

*) La Grange hat auf einem anderen Weg gezeigt, daß diese Reihe weder gebrochene noch negative Potenzen von Δx enthalten könne. Théorie des fonctions par *La Grange*. n. 10. Leçons sur le calcul des fonctions, pag. 9. (nouv. édit.)

$F(b+z)$, $F(b)$ die Werthe verſteht, welche die Function Fx erhält, wenn man ſtatt x beziehungsweiſe $b+z+\Delta x$, $b+z$, b ſezt,

$$F(b+z+\Delta x) = F(b) + (b-a)(z+\Delta x)^{\frac{1}{2}} + (z+\Delta x)^{\frac{3}{2}}$$

$$= F(b) + (b-a)z^{\frac{1}{2}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta x}{z} - \frac{1}{2.4}\left(\frac{\Delta x}{z}\right)^2 + \&c.\right)$$

$$+ z^{\frac{3}{2}}\left(1 + \tfrac{3}{2}\frac{\Delta x}{z} + \frac{3.1}{2.4}\left(\frac{\Delta x}{z}\right)^2 - \&c.\right)$$

$$= F(b) + (b-a)z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left((b-a)z^{\frac{1}{2}} + 3z^{\frac{3}{2}}\right)\frac{\Delta x}{z}$$

$$- \frac{1}{2.4}\left((b-a)z^{\frac{1}{2}} - 3z^{\frac{3}{2}}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{z^2}$$

$$\&c.$$

$$= F(b+z) + \tfrac{1}{2}(b-a+3z)z^{-\frac{1}{2}}\Delta x - \frac{1}{2.4}(b-a-3z)z^{-\frac{3}{2}}\overline{\Delta x}^2 \&c.$$

mit welcher Reihe die in dem dritten Beyſpiel gefundene übereinſtimmt, wenn man in derſelben $b+z$ ſtatt x ſezt.

§. 5. Da in jeder geometriſchen Progreßion, deren erſtes Glied $= a$, und deren Exponent p kleiner als 1 iſt, die Summe von r Gliedern $= \frac{a}{1-p} - \frac{ap^r}{1-p}$; ſo iſt die Summe beſtändig kleiner als $\frac{a}{1-p}$, wie groß auch die Anzahl r ihrer Glieder ſeyn mag. Sey der Exponent $p = \frac{1}{2}$; ſo iſt

$$a\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{2^{r+2}} + \&c.\right)$$

$$= a\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2^{r-1}}\right) + \frac{a}{2^r}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \&c.\right), \text{ oder, weil}$$

$\frac{a}{2^r}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots) < \frac{a}{2^r}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) < \frac{a}{2^{r-1}}$ iſt, jedes Glied $\frac{a}{2^{r-1}}$ der Progreßion iſt größer als die Summe aller folgenden. Folglich iſt um ſo mehr in jeder geometriſchen Progreßion, deren Exponent kleiner als $\frac{1}{2}$ iſt, jedes Glied größer als die Summe aller folgenden Glieder.

Es ſey nun $F(x+z) - Fx = P'z + P''z^2 + P'''z^3 + \&c.$ wo z eine veränderliche Größe bezeichnet, welche kleiner als

jede gegebene Größe gemacht werden kann, und diese Reihe bestehe

1.) Aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern. Man nehme $x < \frac{1}{2}\frac{P'}{P''} < \frac{1}{2}\frac{P''}{P'''}$ u. s. w. das ist kleiner als die Hälfte des kleinsten Quotienten, welchen man erhält, wenn man jeden Coefficienten mit dem unmittelbar folgenden dividirt, so ist $P''z < \frac{1}{2}P'$, $P'''z < \frac{1}{2}P''$ u. s. w. und die Reihe convergirt geschwinder als eine geometrische Progreßion, deren Exponent $= \frac{1}{2}$ ist.

Wenn 2.) Die Reihe nicht abbricht, und die Coefficienten in einer geometrischen Progreßion wachsen, deren Exponent $= p$ ist; so ist $P'' = p.P'$, $P''' = p.P''$ u. s. w. und daher $\frac{P'}{P''} = \frac{1}{p}$, $\frac{P''}{P'''} = \frac{1}{p}$ u. s. w. Man nehme $z < \frac{1}{2p}$; so convergirt die Reihe wiederum geschwinder als eine geometrische Progreßion, deren Exponent $= \frac{1}{2}$ ist.

Wenn 3.) die Coefficienten langsamer wachsen als in einer geometrischen Progreßion; so ist der Quotient $\frac{P'}{P''}$, der kleinste, und die Reihe convergirt geschwinder als eine geometrische Progreßion, deren Exponent $= \frac{1}{2}$ ist, wenn man $z < \frac{P'}{P''}$ nimmt.

Wenn 4.) die Coefficienten anfangs zwar geschwinder wachsen als in einer geometrischen Progreßion, aber nur bis zu einem gewißen Coefficienten $P^{(r)}$, und von da an entweder in einer geometrischen Progreßion, oder langsamer; so ist $\frac{P^{(r-1)}}{P^{(r)}}$ der kleinste Quotient, und die Reihe convergirt geschwinder als eine geometrische Progreßion, deren Exponent $= \frac{1}{2}$ ist, wenn man $z < \frac{P^{(r-1)}}{2P^{(r)}}$ nimmt.

Wenn 5.) die Exponenten der Verhältniße der Coefficienten zu den ihnen unmittelbar vorhergehenden beständig wachsen, aber eine Zahl p' angegeben werden kann, welche diese Exponenten niemals erreichen; so wachsen die Coefficienten langsamer als in einer geometrischen Progreßion, deren Exponent p' ist, und dieser Fall reducirt sich auf n. 2.

In allen diesen Fällen kann also z so klein genommen

werden, daß die Reihe geschwinder convergirt als eine geometrische Progreßion, deren Exponent $= \frac{1}{2}$ ist, und daß jedes Glied der Reihe die Summe aller folgenden übertrifft. Eben diß gilt um so mehr, wenn einige Glieder der Reihe negativ sind. Hat man z diesen Bedingungen gemäß genommen; so ist $F(x+z) < Fx + 2P'z$

$< Fx + P'z + 2P''z^2$

$< Fx + P'z + P''z^2 + 2P'''z^3$

Ebenso $F(x+z) > Fx - 2Pz$

$< Fx - P'z + 2P''z^2$

$> Fx - P'z + P''z^2 - 2P'''z^3$

u. s. w.

§. 6. Vermöge des ersten Beyspiels des 4ten §. ist das Verhältniß der zusammengehörigen Veränderungen Δy und Δx von y und x dem constanten Verhältniß von $b : 1$ gleich. Wenn aber $y = a + bx^2$ ist; so ist

$$y + \Delta y = a + b(x+\Delta x)^2 = a + bx^2 + 2bx.\Delta x + b\overline{\Delta x}^2$$

$$\Delta y = 2bx.\Delta x + b\overline{\Delta x}^2,$$

und $\Delta y : \Delta x = 2bx + b\Delta x : 1$,

welches Verhältniß mit der Größe von Δx und Δy zugleich sich verändert, und beständig größer ist als das durch x gegebene Verhältniß von $2bx : 1$, wie klein man auch Δx und zugleich Δy nimmt. Aber man kann Δx und Δy so klein nehmen, daß das Verhältniß von $\Delta y : \Delta x$ kleiner wird als jedes gegebene Verhältniß $2bx + q : 1$, welche größer ist, als das Verhältniß von $2bx : 1$, wenn man $b\Delta x < q$, $\Delta x < \frac{q}{b}$ macht.

Allgemein, wenn das Verhältniß der zusammengehörigen Veränderungen oder Differenzen Δy und Δx zweyer veränderlichen Größen y und x dem Verhältniß von $P' + p : 1$ gleich ist, wo P' eine von x allein abhängende, mithin durch x gegebene Größe, p aber eine mit Δx zugleich sich verändernde Größe bezeichnet, welche durch die Verminderung von Δx kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Größe; so wird zwar das veränderliche Verhältniß von $\Delta y : \Delta x$ niemals dem gegebenen Verhältniß von $P' : 1$ gleich, und es ist, wenn p positiv ist, $\Delta y : \Delta x$ beständig größer als

$P' : 1$. Aber man kann Δx und Δy so klein nehmen, daß das Verhältniß von $\Delta y : \Delta x$ kleiner wird als jedes gegebene Verhältniß $P' + q : 1$, welches größer als das von $P' : 1$ ist. Macht man nemlich Δx so klein, daß p kleiner als q wird; so ist $\Delta y : \Delta x = P' + p : 1 < P' + q : 1$. Ebenso kann, wenn $\Delta y : \Delta x = P' - p : 1$ ist, unter der vorigen Voraussetzung Δx und zugleich Δy so klein genommen werden, daß $\Delta y : \Delta x > P - q : 1$ wird, wenn man p kleiner als q macht.

Wenn nun ein veränderliches Verhältniß beständig {größer / kleiner} ist als ein gegebenes Verhältniß, aber {kleiner / größer} gemacht werden kann, als jedes gegebene Verhältniß, welches {größer / kleiner} ist als das erstere gegebene Verhältniß; so heißt dieses erstere Verhältniß die Gränze des veränderlichen {abnehmenden / wachsenden} Verhältnißes. Demnach ist, wenn $\Delta y : \Delta x = P' \pm p : 1$, und p durch die Verminderung von Δx kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Größe, die Gränze des Verhältnißes von $\Delta y : \Delta x$ dem von Δx independenten Verhältniß von $P' : 1$ gleich. Das Gränzverhältniß der zusammengehörigen Veränderungen oder Differenzen Δy und Δx zweyer von einander abhängenden veränderlichen Größen y und x, welchem sich das veränderliche Verhältniß der Differenzen desto mehr nähert, je kleiner sie sind, nennt man das Differentialverhältniß der veränderlichen Größen, und bezeichnet es dadurch, daß man statt des Buchstabens Δ den Buchstaben d sezt, so daß Gränze des Verhältnißes von $\Delta y : \Delta x$ und Verhältniß von $dy : dx$ gleichbedeutende Ausdrücke sind. Die Glieder dy und dx des Gränzverhältnißes von $\Delta y : \Delta x$, welche so wie die Differenzen unbestimmte Größen sind, und nur ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, nennt man die Differentiale der veränderlichen Größen y und x. Wenn nemlich das Gränzverhältniß von $\Delta y : \Delta x$ dem von $P' : 1$ gleich ist, und man das Differential dx von x von beliebiger Größe nimmt, sodenn dy so bestimmt, daß $dy : dx = P' : 1$ wird; so ist $dy = P'dx$ das dem Differential dx von x entsprechende Differential von y. Differenzen und Differentiale müßen also

wohl

wohl von einander unterschieden werden. Wenn $\Delta y : \Delta x = P' \pm p : 1$ sich verhält, und p durch die Verminderung von Δx kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Grösse; so ist $dy : dx = P' : 1$, und $dy = P'dx$. Die Differenz Δy von y hingegen ist $(P' \pm p)\,\Delta x$, und daher ist bey gleich großen Veränderungen von x das Differential von y in demselben Verhältniß $\left\{\begin{smallmatrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{smallmatrix}\right\}$ als die Differenz von y, in welchem $P' \left\{\begin{smallmatrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{smallmatrix}\right\}$ ist als $P' \pm p$.

§. 7. Das Differentialverhältniß zweyer veränderlichen Größen, welche gegenseitig von einander abhängen, kann nun auf zweyerley Art gefunden werden. Das eine Verfahren gründet sich auf die bisher betrachtete Entwiklung der Differenz Δy einer Function y der veränderlichen Größe x in eine nach den Potenzen von Δx geordnete Reihe.

Es sey $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P' + P''\Delta x + P'''\Delta x^2 + \&c.$

$= P' + p$ zur Abkürzung,

und p könne durch die Verminderung von Δx kleiner gemacht werden, als jede gegebene Größe q; so ist vermöge des vorhergehenden §.

$\frac{dy}{dx} = P'.$

Sey z. B. $y = a + bx^m$; so ist (§. 4. Beysp. 2.)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mbx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} bx^{m-2}\Delta x$ &c.

Nun kann aber nach §. 3. und 5. durch die Verminderung von Δx die Summe aller auf das erste Glied folgenden Glieder kleiner gemacht werden, als jede gegebene Größe q; folglich ist $\frac{dy}{dx} = mbx^{m-1}$

oder $d.(a + bx^m) = mbx^{m-1}\,dx.$

Demnach ist $d.bx^2 = 2bxdx.$

$d.bx^3 = 3bx^2dx.$

$\left.\begin{smallmatrix} d.bx^{\frac{1}{2}} \\ d.b\sqrt{x} \end{smallmatrix}\right\} = \frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{bdx}{2\sqrt{x}}.$

$$d.\frac{b}{x} = d.bx^{-1} = -bx^{-2}dx = -\frac{bdx}{x^2}.$$

§. 8. Das zweyte Verfahren sezt die Entwiklung der Differenz Δy in eine Reihe nicht voraus, und lauft darauf hinaus, daß man die Gränzen angebe, zwischen welchen der Exponent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des Differentialverhältnißes beständig muß enthalten seyn. Hat man nemlich bewiesen, daß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ beständig $> P'$, aber $< P'+p$, und daß durch die Verminderung von Δx die Größe p kleiner gemacht werden könne als jede gegebene Größe q; so folgt wiederum $\frac{dy}{dx} = P'$. Ebenso, wenn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ beständig $< P'$ aber $> P'-p$; so ist, wenn p kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, $\frac{dy}{dx} = P'$. Und wenn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ größer als eine gegebene Function $F'x$ von x, aber kleiner als $F'(x+\Delta x)$, d. i. kleiner als der Werth ist, welchen die Function $F'x$ erhält, wenn man in ihr $x+\Delta x$ statt x sezt; so ist $\Delta y : \Delta x > F'x : 1$

$$< F'(x+\Delta x) : 1,$$

$$\text{mithin } dy : dx = F'x : 1,$$

$$dy = dx.F'x.$$

Sey z. B. $y = bx^m$, und m eine positive ganze Zahl; so ist

$$y+\Delta y = b(x+\Delta x)^m,$$

$$\Delta y = b((x+\Delta x)^m - x^m).$$

Es ist aber

$$\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = (x+\Delta x)^{m-1} + (x+\Delta x)^{m-2}.x + (x+\Delta x)^{m-3}.x^2 + \ldots$$

$$+ (x+\Delta x)x^{m-2} + x^{m-1},$$

weil diese Reihe mit Δx oder mit $x+\Delta x - x$ multiplicirt giebt $(x+\Delta x)^m - x^m$.

Folglich ist $\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} > mx^{m-1}$,

$$< m(x+\Delta x)^{m-1}, \text{ und daher}$$

$$\Delta y : \Delta x > mbx^{m-1}$$

$$< mb(x+\Delta x)^{m-1} : 1,$$

mithin $dy : dx = mbx^{m-1}$, übereinstimmend mit dem vorhergehenden §.

§. 9. Die Exponenten der Differentialverhältniße sind im Allgemeinen wiederum Functionen der veränderlichen Größe x. Wenn z. B. $y = bx^m$; so ist (§. 7.) $\frac{dy}{dx} = mbx^{m-1}$, ebenfalls eine Function von x. Differentirt man diese Function aufs neue; so hat man nach §. 7.

$$\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = m(m-1)bx^{m-2}.$$

Allgemein, wenn $\frac{dy}{dx} = F'x$, und

$\frac{F'(x+\Delta x)-F'x}{\Delta x} = Q' + Q''.\Delta x + Q'''\overline{\Delta x}^2 + \&c.$ wo Q', Q'' u. s. w. Functionen von x bedeuten; so ist, wenn durch die Verminderung von Δx die Summe aller auf das Glied Q folgenden Glieder kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, $\left.\begin{matrix} \frac{d.F'x}{dx} \\ \text{oder } \frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \end{matrix}\right\} = Q'$ (§. 7.)

Es seyen y', y'', y''' u. s. w. die Werthe, welche eine Function y von x erhält, wenn man statt x sezt $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $x+3\Delta x$ u. s. w. oder es seyen

$y' = F(x+\Delta x)$,
$y'' = F(x+2\Delta x)$,
$y''' = F(x+3\Delta x)$.

Da nun $F(x+\Delta x) = Fx + P'\Delta x + P''\overline{\Delta x}^2 + P'''\overline{\Delta x}^3 + \&c.$ (§. 4.)

so ist $F(x+2\Delta x) = Fx + 2P'\Delta x + 2^2.P''\overline{\Delta x}^2 + 2^3.P'''\overline{\Delta x}^3 + \&c.$

$F(x+3\Delta x) = Fx + 3P'\Delta x + 3^2.P''\overline{\Delta x}^2 + 3^3.P'''\overline{\Delta x}^3 + \&c.$

Die Differenzen der unmittelbar auf einander folgenden Werthe von y sind also ungleich. Man bezeichne sie mit Δy, $\Delta y'$, $\Delta y''$, u. s. w.; so wird man haben

$$\left.\begin{matrix} y'-y \\ \Delta y \end{matrix}\right\} = P'\Delta x + P''\overline{\Delta x}^2 + P'''\overline{\Delta x}^3 + \&c.$$

$$\left.\begin{matrix} y'' - y' \\ \Delta y' \end{matrix}\right\} = P' \Delta x + 3P'' \overline{\Delta x}^2 + 7P''' \overline{\Delta x}^3 + \&c.$$

$$\left.\begin{matrix} y''' - y'' \\ \Delta y'' \end{matrix}\right\} = P' \Delta x + 5P'' \overline{\Delta x}^2 + 19P''' \overline{\Delta x}^3 + \&c.$$

welche Differenzen ungleich sind, wenn nicht P'', P''' u. s. w. verschwinden. Man nehme die Differenzen dieser Differenzen; so erhält man die so genannten zweyte Differenzen, welche man mit $\Delta^2.y$, $\Delta^2.y'$, $\Delta^2.y''$ u. s. w. bezeichnet, nemlich

$$\left.\begin{matrix} \Delta y' - \Delta y \\ \Delta^2.y \end{matrix}\right\} = 2P'' \overline{\Delta x}^2 + 6P''' \overline{\Delta x}^3 + \&c.$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta y'' - \Delta y' \\ \Delta^2.y' \end{matrix}\right\} = 2P'' \overline{\Delta x}^2 + 12P''' \overline{\Delta x}^3 + \&c.$$

und wenn man aufs neue die Differenzen dieser Differenzen nimmt, welche dritte Differenzen heißen, und mit $\Delta^3.y$, $\Delta^3.y'$ u. s. w. bezeichnet werden,

$$\left.\begin{matrix} \Delta^2.y - \Delta^2.y \\ \Delta^3.y \end{matrix}\right\} = 6P''' \overline{\Delta}^3 + \&c.$$

Es ist also $\frac{\Delta^2.y}{\Delta x^2} = 2P'' + 6P''' \Delta x + \&c.$ und, wenn die Summe aller auf das Glied $2P''$ folgenden Glieder durch die Verminderung von Δx kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, die Gränze des Verhältnißes von $\Delta^2.y : \overline{\Delta x}^2 = 2P'' : 1$ (§. 6.), welches Gränzverhältniß man mit $d^2.y : \overline{dx}^2$ bezeichnet, so daß man hat $\frac{d^2.y}{dx^2} = 2P''$.

Nun ist aber $\Delta y = F(x + \Delta x) - Fx$,

$$\Delta y' = F(x + 2\Delta x) - F(x + \Delta x);$$

folglich erhält man auch $\Delta y'$ aus Δy, wenn man in dem Ausdruk von Δy statt x sezt $x + \Delta x$. Es seyen $P' + \Delta P'$, $P + \Delta P''$ u. s. w. die Werthe, welche die Coefficienten P', P'' u. s. w. erhalten, wenn man statt x sezt $x + \Delta x$; so sind

$$\Delta y = P' \Delta x + P'' \overline{\Delta x}^2 + P''' \overline{\Delta x}^3 + \&c.$$

$$\Delta y' = (P' + \Delta P') \Delta x + (P'' + \Delta P'') \overline{\Delta x}^2 + (P''' + \Delta P''') \overline{\Delta x}^3 + \&c.$$

$$\Delta^2.y = \Delta P'.\Delta x + \Delta P''.\overline{\Delta x}^2 + \Delta P''.\overline{\Delta x}^3 + \&c.$$

$$\frac{\Delta^2.y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta P'}{\Delta x} + \Delta P'' + \Delta P'''.\Delta x + \&c.$$

Wenn also das Gränzverhältniß von $\Delta P' : \Delta x$ möglich ist, und $\Delta P'' + \Delta P'''$, Δx u. s. w. durch die Verminderung

von Δx kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann; so ist

$$\frac{d^2.y}{dx^2} = \frac{dP'}{dx} = \frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}, \text{ weil } \frac{\Delta y}{\Delta x} = P' + P''\Delta x + \&c.$$

Die Ausdrücke $\frac{d^2.y}{dx^2}$ und $\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ sind also gleichbedeutend, und man erhält $\frac{d^2.y}{dx^2}$ aus $\frac{dy}{dx}$, wenn man die Function, welcher $\frac{dy}{dx}$ gleich ist, aufs neue differentiirt. So wie man nun $\Delta^2.y$ die zweyte Differenz von y nennt, so nennt man, wenn $d^2.y : dx^2$ das Gränzverhältniß von $\Delta^2.y : \Delta x^2$ ist, $d^2.y$ das zweyte Differential von y. Ebenso nennt man, wenn man die Function, welcher $\frac{d^2.y}{dx^2}$ gleich ist, aufs neue differentiirt, wodurch man das Gränzverhältniß von $\Delta^3.y : \Delta x^3$ oder das Verhältniß $d.^3y : dx^3$ erhält, $d^3.y$ das dritte Differential von y, u. s. w. Allgemein heißen diese Differentiale höhere Differentiale. Mehrerer Bequemlichkeit halber schreibt man dx^2 statt dx^2, so daß dx^2 das Quadrat von dx bezeichnet. Sezt man zwischen d und die darauf folgende Größe einen Punkt; so zeigt diß das Differential der Größe an, z. B. $d.x^2$ bedeutet das Differential von x^2, $d.x^m$ bedeutet das Differential von x^m u. s. w. Endlich bezeichnen d^3y, $d^4.y$, d^ry. das dritte, vierte, $r$te Differential von y, oder zeigen an, daß man die Größe y dreymal, viermal, $r$mal nach einander differentiirt hat.

Wenn z. B. $y = bx^m$

so ist $\frac{dy}{dx} = mbx^{m-1}$ (§. 7.), und nach derselben Regel

$$\frac{d^2.y}{dx^2} = m(m-1)bx^{m-2}.$$

Ferner $\frac{d^3.y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)bx^{m-3}$.

Allgemein ist, wenn r eine positive ganze Zahl bezeich-

net, $\frac{d^r.y}{dx^r} = m(m-1)\ldots(m-(r-1))\,bx^{m-r}$. Denn es ist nach §. 7.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d.\left(\frac{d^r.y}{dx^r}\right)}{dx} \\ \text{oder } \dfrac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} \end{array}\right\} = m(m-1)\ldots(m-(r-1))(m-r)\,bx^{m-r-1}$$

welcher Ausdruk aus dem unmittelbar vorhergehenden entsteht, wenn man in demselben statt r sezt $r+1$.

Wenn m eine positive ganze Zahl ist; so bricht die Reihe der höheren Differentiale von bx^m ab, in den übrigen Fällen hingegen nicht. In Beziehung auf den ersteren Fall ist $m-1$ eine positive ganze Zahl und, wenn man $m-1$ statt r sezt

$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = m(m-1)\ldots(m-(m-1))\,bx$, und, wenn man noch einmal differentiirt,

$\frac{d^m.y}{dx^m} = m(m-1)\ldots 1.b =$ einer constanten Grösse, welche weder eine Differenz noch ein Differential hat. Folglich fallen alle folgende Differentiale weg, oder sind $= 0$. Daher ist, wenn m eine positive ganze Zahl ist,

$\frac{d^m\,bx^m}{dx^m} = 1.2.\ldots.m.b$, und alle folgende Differentiale sind $= 0$.

Eine ähnliche Beziehung findet zwischen den Differenzen der positiven ganzen Potenzen von Zahlen statt, welche in einer arithmetischen Reihe auf einander folgen. Es ist nemlich $\Delta^2.x^2 = 1.2.\overline{\Delta x}^2$,

$\Delta^3.x^3 = 1.2.3.\overline{\Delta x}^3$,

allgemein $\Delta^m.x^m = 1.2.4\ldots m.\overline{\Delta x}^m$ *).

§. 10. Wenn y eine Function Fx der veränderlichen Grösse x, und eine andere Function $F'x$ von x so beschaffen

*) *l'Huilier* expositio princ. calc. different. et integr. pag. XV.

ist, daß das Verhältniß von $\left\{\frac{\Delta y}{F(x+\Delta x)-Fx}\right\}$: Δx beständig $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ ist als das Verhältniß von $F'x : 1$, aber $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als das Verhältniß von $F'(x+\Delta x) : 1$, wie klein auch Δx genommen werden mag; so ist vermöge des 8ten §.

$$dy : dx = F'x : 1,$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{dy}{dx}\\ \frac{d.Fx}{dx}\end{matrix}\right\} = F'x.$$

Umgekehrt, wenn $F'x = \frac{d.Fx}{dx}$ ist; so kann Δx so klein genommen werden, daß für diesen Werth von Δx, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe desselben $F(x+\Delta x)-Fx$ zwischen den zwey Gränzen $\Delta x\, F'x$ und $\Delta x\, F'(x+\Delta x)$ enthalten ist.

Sey nemlich $\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} = P' + P''\overline{\Delta x}^2 + \text{\&c.}$ so wird man, weil $F'x$ oder $\frac{d.Fx}{dx}$ möglich ist (Voraussf.), Δx so klein nehmen können, daß jedes Glied dieser Reihe die Summe aller folgenden übertrifft. Man wird also haben $\frac{d.Fx}{dx} = P' = F'x$, und $2P'' = \frac{d.F'x}{dx} = \frac{d^2.Fx}{dx^2}$ (§. 9.), mithin, wenn man $\frac{d^2.Fx}{dx^2} = F''x$ sezt,

1.) $F(x+\Delta x) = Fx + \Delta x.F'x + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}F''x + \text{\&c.}$ und ebenso

2.) $F'(x+\Delta x) = F'x + \Delta x\,\frac{d.F'x}{dx} + \text{\&c.}$

$= F'x + \Delta x.F''x + \text{\&c.}$ folglich ist

3.) $Fx + \Delta x F'(x+\Delta x) = Fx + \Delta x F'x + \overline{\Delta x}^2.F''x + \text{\&c.}$

Sey Δx so klein genommen, daß jedes Glied dieser Reihen die Summe aller folgenden Glieder übertreffe; so ist $F'(x+\Delta x)-Fx$ positiv oder negativ, je nachdem $F'x$ positiv oder negativ ist.

Wenn nun $F'x$ und $F''x$ positiv sind; so ist

4.) $F(x+\Delta x)-Fx > \Delta x F'x$

aber $< \Delta x F'x + 2.\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}F''x$

$$< \Delta x\, F'(x+\Delta x) \text{ (n. 3.)}$$

Es bleibe $F'x$ positiv, aber $F''x$ sey negativ; so ist

5.) $F(x+\Delta x) - Fx < \Delta x\, F'x$

$$> \Delta x\, F'x - \overline{\Delta x}^2\, F''x$$

$$> \Delta x\, F'(x+\Delta x) \text{ n. 3.).}$$

Wenn $F'x$, mithin auch $F(x+\Delta x) - Fx$ negativ ist; so ist, wenn man blos auf die Größe von $F(x+\Delta x) - Fx$ Rükſicht nimmt,

6.) $F(x+\Delta x) - Fx \left\{ \begin{array}{l} > \Delta x\, F'x \\ < \Delta x\, F'(x+\Delta x) \end{array} \right\}$ wenn $F''x$ negativ,

7.) $F(x+\Delta x) - Fx \left\{ \begin{array}{l} < \Delta x\, F'x \\ > \Delta x\, F'(x+\Delta x) \end{array} \right\}$ wenn $F''x$ positiv ist

§. 11. Es ſey $F'x$ oder $\frac{d.Fx}{dx}$ möglich von x an bis $x+z$, und $F''x$ habe innerhalb dieſer Gränzen einerley Zeichen mit $F'x$. Man denke ſich z in ſo viele gleiche Theile getheilt, deren jeder $= \Delta x$ und ſo klein ſey, daß die Bedingungen des vorhergehenden §. erfüllt werden; ſo wird man wenn die Anzahl dieſer Theile $= n$ iſt, vermöge n. 4. und 6. des vorhergehenden §. haben

$F(x+\Delta x) - Fx > \Delta x\, F'x$

$F(x+2\Delta x) - F(x+\Delta x) > \Delta x\, F'(x+\Delta x)$

$F(x+3\Delta x) - F(x+2\Delta x) > \Delta x\, F'(x+2\Delta x)$

.

.

$F(x+(n-1)\Delta x) - F(x+(n-2)\Delta x) > \Delta x\, F'(x+(n-2)\Delta x)$

$F(x+n\Delta x) - F(x+(n-1)\Delta x) > \Delta x\, F''(x+(n-1)\Delta x);$

folglich iſt, wenn man ſummirt,

1.) $F(x+n\Delta x) - Fx$ oder $F(x+z) - Fx \left\{ > \Delta x [F'x + F'(x+\Delta x) + F'(x+2\Delta x) + \ldots + F'(x+(n-1)\Delta x)] \right.$

Auf der anderen Seite iſt vermöge n. 4. u. 6. des vorhergehenden §.

$F(x+\Delta x) - Fx < \Delta x\, F'(x+\Delta x)$

$F(x+2\Delta x) - F(x+\Delta x) < \Delta x\, F'(x+2\Delta x)$

.

.

$F(x+n\Delta x) - F(x+(n-1)\Delta x) < \Delta x\, F'(x+n\Delta x);$

folglich iſt

2.) $\left.\begin{matrix} F(x+n\Delta x)-Fx \\ F(x+z)-Fx \end{matrix}\right\} < \Delta x\,[F'(x+\Delta x)+F'(x+2\Delta x)+\ldots + F'(x+n\Delta x)]$

Eben so folgt, wenn $F'x$ und $F''x$ verschiedene Zeichen haben, aus n. 5. u. 7. des vorhergehenden §.

3.) $F(x+z)-Fx < [F'x+F'(x+\Delta x)+\ldots+F'(x+(n-1)\Delta x)]$,

und

4.) $F(x+z)-Fx > \Delta x\,[F'(x+\Delta x)+\ldots+F'(x+n\Delta x)]$.

Wie groß also auch die Anzahl n der gleichen Theile, in welche man die Größe z eingetheilt hat, seyn mag; so ist beständig, wenn $F'x$ und $F''x$ einerley Zeichen haben, vermöge n. 1. u. 2.

$F(x+z)-Fx > \Delta x(F'x+\ldots+F'(x+(n-1)\Delta x))$,

und $< \Delta x(F'(x+\Delta x)+\ldots+F'(x+n\Delta x))$.

Der Unterschied der zwey Reihen, zwischen welchen $F(x+z)-Fx$ beständig enthalten ist, findet sich aber $= \Delta x\,(F'(x+n\Delta x)-F'x) = \Delta x\,(F'(x+z)-F'x)$, welcher durch die Verminderung von Δx oder durch die Vergrößerung von n kleiner als jede gegebene Größe q gemacht werden kann, wenn man Δx kleiner als $\frac{q}{F'(x+z)-F'x}$, oder, weil $n\Delta x = z$ ist (Voraus§.), $n > \frac{z}{q}\,(F'(x+z)-F'x)$ nimmt. Folglich ist $F(x+z)-Fx$ die Gränze, welcher sich die Reihe $\Delta x\,(F'x+\ldots+F'(x+(n-1)\Delta x))$ bey der Verminderung von Δx oder bey der Vergrößerung der Anzahl n ihrer Glieder beständig nähert, ohne sie jemals zu erreichen.

Ebenso ist, wenn $F'x$ und $F''x$ verschiedene Zeichen haben, vermöge n. 3. u. 4.

$F(x+z)-Fx < \Delta x\,(F'x+\ldots+F'(x+(n-1)\Delta x))$,

$> \Delta x\,(F'(x+\Delta x)+\ldots+F'(x+n\Delta x))$.

Der Unterschied $(F'x-F'(x+n\Delta x))\Delta x$ oder $\Delta x\,(F'x-F'(x+z))$ kann wiederum durch die Verminderung von Δx oder durch die Vergrößerung von n kleiner gemacht werden, als jede gegebene Größe q, wenn man Δx kleiner als $\frac{q}{F'x-F'(x+z)}$ oder n größer als $\frac{z}{q}\,(F'x-F'(x+z))$ nimmt;

folglich ist wiederum $F(x+z)-Fx$ die Gränze der Summe der Reihe $\Delta x(F'x+\ldots+F'(x+(n-1)$.

Sey z. B. $F'x$ oder $\frac{d.Fx}{dx} = bx$; so sind.

$F'(x+\Delta x) = b(x+\Delta x)$,

$F'(x+2\Delta x) = b(x+2\Delta x)$, u. s. w.

und $\frac{d\,F'x}{dx}$ oder $F''x = \frac{d.bx}{dx} = b$. Folglich ist nach n. 1. u. 2.

$$F(x+z)-Fx \gtrless b\Delta x(x,+x+\Delta x,+\ldots+x+(n-1)\Delta x),$$
$$\lessgtr b\Delta x(x+\Delta x,+\ldots+x+n\Delta x),$$

d. i. wenn man diese arithmetische Reihen summirt,

$$F(x+z)-Fx \gtrless b\Delta x\left(nx+\frac{n(n-1)}{2}\Delta x\right),$$

$$\gtrless nb\Delta x\left(x+\frac{n}{2}\Delta x-\tfrac{1}{2}\Delta x\right),$$

$$\gtrless bz\left(x+\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}\frac{z}{n}\right), \text{ weil } n\Delta x = z,$$

$$\lessgtr b\Delta x\left(nx+\frac{n(n+1}{2}\Delta x\right),$$

$$\lessgtr bz\left(x+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\frac{z}{n}\right)$$

Der Unterschied dieser zwey Ausdrücke ist $\frac{bz^2}{n}$, welcher kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Größe q, wenn man $n \gtrless \frac{bz^2}{q}$ macht. Folglich ist

$F(x+z)-Fx = bz(x+\frac{1}{2}z)$,

$= bxz+\frac{1}{2}bz^2$.

Da nun in gegenwärtigem Fall $Fx' = bx$, und daher $F'x$ möglich ist von $x=0$ an; so wird, wenn man $x=0$ und den correspondirenden bestimmten Werth von $Fx = C$ sezt,

$$\left.\begin{matrix}F(0+z)-C\\ Fz-C\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}bz^2,$$

und $Fz = C+\frac{1}{2}bz^2$, oder auch, weil z jeden Werth haben kann,

$Fx = C+\frac{1}{2}bx^2$.

Man erhält hieraus, wenn man nach §. 7. differentiirt,

$\frac{d.Fx}{dx} = 2.\frac{1}{2}bx = bx$, welches das vorgegebene Differential ist.

Und weil $Fx = C + \frac{1}{2}bx^2$; so ist

$F(x+z) - Fx = C + \frac{1}{2}b(x+z)^2 - (C + \frac{1}{2}bx^2)$,

$= bxz + \frac{1}{2}bz^2$, wie man oben gefunden hat.

§. 12. Die in dem vorhergehenden §. gezeigte Methode, aus dem Differential einer Function einer veränderlichen Größe die Function selbst zu finden, welche sich auf Summation der Reihen gründet, würde bey verwickelteren Functionen große Schwierigkeiten haben. Es fragt sich aber, ob nicht durch Umkehrung der Regeln, nach welchen man das Differential einer gegebenen Function findet, aus einem gegebenen Differential die Function selbst gefunden, und dadurch die Summation der Reihen vermieden werden könne. Es ist z. B. das Differential von $a + bx^m = mbx^{m-1}dx$ (§. 7.), und man findet hieraus wiederum die Function bx^m, wenn man in dem Ausdruk des Differentials den Exponenten $m-1$ von x um eine Einheit vergrößert, das Differential mit diesem vergrößerten Exponenten dividirt, und dx wegläßt. Die constante Größe a, welche aus dem Differential weggefallen ist, wird aber unbestimmt bleiben, so daß, wenn man unter C irgend eine constante Größe versteht, die Function, deren Differential $= mbx^{m-1}dx$ ist, im Allgemeinen seyn wird $= C + bx^m$. Denn man findet, weil C eine constante Größe ist (Voraus§.), nach §. 7. das Differential von $C + bx^m = mbx^{m-1}dx$. Wäre das vorgegebene Differential $= bxdx$; so würde hienach die gesuchte Function $= C + \frac{bx^{1+1}}{1+1} = C + \frac{1}{2}bx^2$, wie man in dem vorhergehenden §. gefunden hat. Käme noch die Bedingung hinzu, daß die gesuchte Function für $x = 0$ verschwinden soll; so müßte $C = 0$, mithin $Fx = \frac{1}{2}bx^2$ seyn. Sollte für $x = 0$ die gesuchte Function $= a$ werden; so würde man haben $C = a$, und $Fx = a + \frac{1}{2}bx^2$. Aus dem vorhergehenden §. erhellt, daß der veränderliche Theil der Function durch ihr Differential gegeben ist, und die verschiedenen Functionen, welche die gegebene Function $bxdx$ zum Differential haben, nur um eine constante Größe von einander verschieden seyn können. Die in eben diesem §. bewiesenen Sätze werden

dazu dienen, im Allgemeinen zu beweisen, daß zwey Functionen einer veränderlichen Größe, welche einerley Differential haben, nur um eine constante Größe von einander verschieden seyn können.

Es seyen nemlich zwey Functionen Fx und φx von x so beschaffen, daß beständig $\frac{d.Fx}{dx} = \frac{d.\varphi x}{dx}$, oder $F'x = \varphi'x$ sey; so wird man auch haben $\frac{d.F'x}{dx} = \frac{d.\varphi'x}{dx}$, oder $F''x = \varphi''x$, und wenn $F''x$ mit $F'x$ einerley Zeichen hat von einem gewißen Werth von x an bis $x+z$, so wird innerhalb dieser Gränzen auch $\varphi'x$ mit $\varphi''x$ einerley Zeichen haben. Vermöge §. 11. n. 1. u. 2. wird man Δx so klein uehmen können, daß

1.) $F(x+z) - Fx > \Delta x(F'x + F'(x+\Delta x) + \ldots + F'(x+(n-1)\Delta x))$,
2.) $F(x+z) - Fx < \Delta x(F'(x+\Delta x) + \ldots + F'(x+n\Delta x))$.

Eben so wird seyn

$\varphi(x+z) - \varphi x > \Delta x(\varphi'x + \varphi'(x+\Delta x) + \ldots + \varphi'(x+(n-1)\Delta x))$

oder, weil beständig $\varphi'x = F'x$ (Voraussf.)

3.) $\varphi(x+z) - \varphi x > \Delta x(F'x + F'(x+\Delta x) + \ldots + F'(x+(n-1)\Delta x))$,

und ebenso

4.) $\varphi(x+z) - \varphi x < \Delta x(F'(x+\Delta x) + \ldots + F'(x+n\Delta x))$.

Da nun $F(x+z) - Fx$ und $\varphi(x+z) - \varphi x$ beständig zwischen denselben Gränzen enthalten sind, welche durch die Verminderung von Δx um weniger als jede gegebene Größe von einander verschieden gemacht werden können; so wird seyn

$$\varphi(x+z) - \varphi x = F(x+z) - Fx.$$

Denn wäre erstlich $\varphi(x+z) - \varphi x > F(x+z) - Fx$; so seye

$$\varphi(x+z) - \varphi x = F(x+z) - Fx + q.$$

Man nehme Δx kleiner als $\frac{q}{F'(x+z) - F'x}$. Alsdenn wäre, weil $z = n\Delta x$ (§. 11.),

$$\Delta x F'(x+n\Delta x) - \Delta x F'x < q,$$

mithin $\varphi(x+z) - \varphi x > F(x+z) - Fx + \Delta x F'(x+n\Delta x) - \Delta x F'x$

und um so mehr $> \Delta x(F'x + F'(x+\Delta x) + \ldots + F'(x+(n-1\Delta x))$ (n. 1.)

$$- \Delta x F'x + \Delta x F'(x+n\Delta x),$$

$$> \Delta x(F'(x+\Delta x) + \ldots + F'(x+n\Delta x)),$$

welches dem Saz n. 4. widerspricht.

Wäre aber zweytens

$$\varphi(x+z)-\varphi x < F(x+z)-Fx,$$
$$= F(x+z)-Fx-q;$$

so nehme man $\Delta x < \frac{b}{F'(x+z)-F'x}$.

Alsdenn wäre $\Delta x\, F'(x+n\Delta x)-\Delta x F'x < q$; mithin

$$\varphi(x+z)-\varphi x < F(x+z)-Fx-\Delta x F'(x+n\Delta x)+\Delta x F'x,$$

und um so mehr $< \Delta x(F'(x+\Delta x)+\ldots+F'(x+n\Delta x))$ (n. 2.)

$$+\Delta x F'x \qquad -\Delta x F'(x+n\Delta x),$$
$$< \Delta x(F'x+\ldots+F'(x+(n-1)\Delta x)),$$

welches dem Saz n. 3. widerspricht.

Ebenso wird mittelst der Säze n. 3. u. 4. des 11ten §. der Beweiß geführt, wenn $F'x$ und $F''x$, mithin auch $\varphi'x$ und $\varphi''x$ verschiedene Zeichen haben.

Endlich wenn die Functionen Fx und φx so beschaffen sind, daß $F'x$ und $F'x$, mithin auch φx und $\varphi''x$ bald einerley, bald entgegengesezte Zeichen haben; so wird man den vorigen Beweiß auf die verschiedenen Theile der zwey Functionen besonders anwenden können, so daß man, wenn $\varphi'x$ und $F'x$ beständig einander gleich sind, die Gleichung haben wird $\varphi(x+z)-\varphi x = F(x+z)-Fx$.

Hieraus folgt $\varphi(x+z)-F(x+z) = \varphi x - Fx$.

Da nun $\varphi x - Fx$ als eine neue Function von x betrachtet werden kann, welche dem Unterschied der zwey Functionen φx und Fx gleich ist, und diese aus den zwey Functionen φx und Fx zusammengesezte Function vermöge obiger Gleichung sich nicht ändert, wenn man in ihr die veränderliche Größe x um eine beliebige Größe sich ändern läßt, und $x+z$ statt x sezt; so muß $\varphi x - Fx$ einer constanten Größe gleich seyn, und man wird die Gleichung haben

$$\varphi x - Fx = \text{Const.}$$
$$\varphi x = C + Fx.$$

§. 13. Es seyen zwey Functionen fx und φx von x so beschaffen, daß beständig das Verhältniß des Differentials von fx zu dem Differential von φx dem gegebenen Verhältniß von $a:b$ gleich sey; so wird sich auch verhalten

$$f(x+z)-fx : \varphi(x+z)-\varphi x = a:b.$$

Bew. Da $f'x : \varphi'x$ beſtändig $= a : b$; ſo iſt auch

$f'(x+\Delta x) : \varphi'(x+\Delta x) = a : b,$

$\vdots$

$f'(x+(n-1)\,\Delta x) : \varphi'(x+(n-1)\,\Delta x) = a : b$

$f'(x+n\Delta x) \;:\; \varphi'(x+n\Delta x) = a : b.$

und daher (V, 12. Elem.)

1.) $f'x+..+f'(x+(n-1)\,\Delta x) : \varphi'x+..+\varphi'(x+(n-1)\Delta x) = a : b,$

2.) $f'(x+\Delta x)+..+f'(x+n\Delta x) : \varphi'(x+\Delta x)+..+\varphi'(x+n\Delta x) = a : b.$

Wäre nun $f(x+z)-fx : \varphi(x+z)-\varphi x > a : b$; ſo ſeye

$f(x+z)-fx : \varphi(x+z)-\varphi x+q = a : b.$

Man nehme $\Delta x < \frac{q}{\varphi'(x+z)-\varphi'x}$; ſo iſt

$\Delta x\,\varphi'(x+z)-\Delta x\,\varphi'x < q$, und daher

$\varphi(x+z)-\varphi x+\Delta x.\,\varphi'(x+z)-\Delta x.\,\varphi x < \varphi(x+z)-\varphi x+q.$

Folglich wäre, wenn $\varphi'x$ und $\varphi''x$ einerley Zeichen haben, vermöge §. 11. n. 1. um ſo mehr

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x(\varphi'x+..+\varphi'(x+(n-1)\,\Delta x))\\ +\Delta x.\varphi'(x+n\Delta x)-\Delta x.\varphi'x\end{array}\right\} < \varphi(x+z)-\varphi x+q,$$

oder $\Delta x(\varphi'(x+\Delta x)+\ldots+\varphi'(x+n\Delta x)) < \varphi(x+z)-\varphi x+q,$

und $f(x+z)-fx : \Delta x(\varphi'(x+\Delta x)+\ldots+\varphi'(x+n\Delta x))$

$> f(x+z)-fx : \varphi(x+z)-\varphi x+q,$

$> a : b$ (Vorausſ.)

$> f'(x+\Delta x)+..+f'(x+n\Delta x) : \varphi'(x+\Delta x)+..+\varphi'(x+n\Delta x)$ (n.2.),

$> \Delta x(f'(x+\Delta x)+\ldots+f'(x+n\Delta x)) :$

$\Delta x(\varphi'(x+\Delta x)+\ldots+\varphi'(x+n\Delta x)),$

Mithin müßte $f(x+z)-fx$ größer ſeyn als

$$\Delta x\,(f'(x+\Delta x)+\ldots.\,f'(x+n\Delta x)),$$

welches dem Saz n. 2. §. 11. widerſpricht.

Ebenſo wird gezeigt, daß das Verhältniß von $f(x+z)-fx : \varphi(x+z)-\varphi x$ auch nicht kleiner ſeyn könne als das von $a : b$. Und wenn $\varphi'x$ und $\varphi''x$ verſchiedene Zeichen haben; ſo wird der Beweiß auf ähnliche Art mittelſt n. 3. u. 4. §. 11. geführt.

Wenn alſo $\frac{d.fx}{dx} : \frac{d.\varphi x}{dx}$ ſich verhält wie $a : b$; ſo verhält ſich auch

$$f(x+z)-fx : \varphi(x+z)-\varphi x = a : b,$$

und es ist $b.f(x+z)-b.fx = a.\varphi(x+z)-a.\varphi x$,

$b.f(x+z)-a.\varphi(x+z) = b.fx-a.\varphi x$.

Da nun vermöge dieser Gleichung die Function $bfx-a.\varphi x$ von x sich nicht ändert, wenn statt x sezt $x+z$; so ist

$b.fx-a.\varphi x = \text{Const.}$

und $fx = \frac{C}{b} + \frac{a}{b}\varphi x$,

oder, weil b ebenfalls eine constante Größe ist,

$$fx = C' + \frac{a}{b}\varphi x$$

§. 14. Diejenige Function einer oder mehrerer veränderlichen Größen, deren Differential einem vorgegebenen Differential gleich ist, heißt das Integral dieses Differentials, und ein Differential integriren heißt das Integral desselben angeben. Wenn z. B. $ay = bx^n dx$ ist, b und n constante Größen sind, und n nicht $= -1$ ist; so ist $\frac{b}{n+1} x^{n+1} + C$ das Integral von $bx^n dx$. Denn das Differential der Function $\frac{b}{n+1} x^{n+1}+C$ ist (§. 7.) $= \frac{(n+1)b}{n+1} x^{n+1-1}dx = bx^n dx =$ dem vorgegebenen Differential. Es ist also $y = C + \frac{bx^{n+1}}{n+1}$, und wenn die gesuchte Function so beschaffen seyn soll, daß für $x = 0$ auch $y = 0$; so wird man haben $y = \frac{b}{n+1} x^{n+1}$. Das Integral eines Differentials zeigt man durch das vorgesezte Zeichen $\int$ an, z. B. $\int bx^n dx = C + \frac{b}{n+1} x^{n+1}$. Dieses Zeichen gründet sich auf die §. 11. 12. 13. betrachtete Summation der Reihen, und zeigt die Gränze der Summe jener Reihen an, welcher sich die leztere desto mehr nähert, je kleiner man ihre Glieder und je größer man zugleich die Anzahl der Glieder nimmt. Man hat dieses Zeichen beybehalten, ungeachtet man die Integrale auf einem anderen Weg, als durch die Summation der Reihen, und dadurch findet, daß man die Regeln, nach welchen die Differentiale gefunden werden, umkehrt, oder die vorgegebenen Differentiale auf die Form der Differentiale gegebener Functionen zu bringen

sucht. Diese Untersuchungen machen den Gegenstand der Integralrechnung aus, welche hienach das Umgekehrte der Differentialrechnung ist.

§. 15. Sey $y = a + bx^m + gx^n + hx^r$, und a, b, g, h, so wie die Exponenten m, n, r seyen constante Größen; so ist

$$y + \Delta y = a + b(x + \Delta x)^m + g(x + \Delta x)^n + h(x + \Delta x)^r,$$
$$= a + bx^m + gx^n + hx^r$$
$$+ mbx^{m-1}\Delta x + ngx^{n-1}\Delta x + rhx^{r-1}\Delta n$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} bx^{m-2}\overline{\Delta x}^2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} gx^{n-2}\overline{\Delta x}^2 + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} hx^{r-2}\overline{\Delta x}^2$$
$$+ \&c. \quad + \&c. \quad + \&c.$$

und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = mbx^{m-1} + ng^{n-1} + rhx^{n-1}$

$$+ \left(\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} bx^{m-2} + \&c.\right)\Delta x$$
$$+ \left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} gx^{n-2} + \&c.\right)\Delta x$$
$$+ \left(\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} hx^{r-2} + \&c.\right)\Delta x.$$
$$= mbx^{m-1} + ngx^{n-1} + rhx^{r-1}$$
$$+ p + p' + p'' \text{ zur Abkürzung.}$$

Vermöge §. 3. u. 5. können durch Verminderung von Δx die Größen p, p', p'' kleiner gemacht werden als jede gegebene Größe q; folglich kann ihre Summe kleiner gemacht werden als q, wenn man jede derselben kleiner als $\frac{q}{3}$ macht, weil alsdenn $p + p' + p'' < \frac{3q}{3}$ oder $< q$ wird. Diß wird um so mehr statt finden, wenn einige der Größen p, p', p'' negativ sind. Vermöge §. 6. 7. ist also

$$\frac{dy}{dx} = mbx^{m-1} + ngx^{n-1} + rhx^{r-1}.$$

Umgekehrt, wenn $\frac{dy}{dx} = Mx^m + Nx^n + Rx^r$, und M, N, R, so wie die Exponenten von x constante Größen sind; so ist

$$y = \text{Const.} + \frac{M}{m+1} x^{m+1} + \frac{N}{n+1} x^{n+1} + \frac{R}{r+1} x^{r+1}.$$

Denn

Denn $\frac{dy}{dx} = \frac{(m+1)M}{m+1} x^m + \frac{(n+1)N}{n+1} x^n + \frac{(r+1)R}{r+1} x^r$,

$= Mx^m + Nx^n + Rx^r =$ dem vorgegebenen Differential, und jede andere Function von x, deren Differential dem vorgegebenen gleich ist, kann von dem oben angegebenen Integral nur um eine constante Größe verschieden seyn (§. 12.), welche in dem Ausdruk desselben schon begriffen ist.

Es ist also

$\int (adx + bxdx) = C + ax + \frac{1}{2} bx^2.$

$\int (adx + bxdx + cx^2 dx) = C + ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3$

u. s. w.

§. 16. Weil die höheren Differentiale aus den unmittelbar vorhergehenden durch wiederholtes Differentiiren gefunden werden (§. 9.); so erhält man umgekehrt aus einem vorgegebenen höheren Differential das unmittelbar vorhergehende nach denselben Regeln, nach welchen aus dem ersten Differential einer Function die Function selbst gefunden wird. Man wird also aus dem zweyten Differential das erste, und aus diesem die Function selbst erhalten, mithin zweymal nach einander integriren müßen. Allgemein wird man, um die Function zu finden, deren $r$tes Differential gegeben ist, r mal nach einander integriren müßen. Bey jeder Integration muß aber eine constante Größe hinzugefügt werden (§. 12.); folglich wird die gesuchte Function ebenso viele constante Größen enthalten, als der Index r des höheren Differentials Einheiten enthält, und es werden ebenso viele von einander unabhängige Bedingungen erfordert, um die Function vollkommen zu bestimmen.

Sey z. B. $\frac{d^2 . y}{dx^2} = bx^m$,

oder (§. 9.) $d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = bx^m dx$;

so ist $\frac{dy}{dx} = \int bx^m dx = C + \frac{b}{m+1} x^{m+1}$ (§. 14.),

$dy = C\,dx + \frac{b}{m+1} x^{m+1} dx$,

$y = C' + Cx + \frac{b}{(m+1)(m+2)} x^{m+2}$ (§. 15.).

Soll $\frac{dy}{dx} = 0$ werden für $x = 0$; so muß seyn $C = 0$. Und wenn für $x = 0$ auch y verschwinden soll; so muß C' ebenfalls $= 0$ seyn. Dadurch ist die Function y bestimmt, und $= \frac{b}{(m+1)(m+2)} x^{m+2}$. Es bleibe die zweyte Bedingung, aber für $x = a$ soll $\frac{dy}{dx}$ einer gegebenen Größe h gleich wer-

den; so wird man haben $h = C + \frac{b}{m+1} a^{m+1}$, $C = h - \frac{b}{m+1} a^{m+1}$,

und $y = \left(h - \frac{b}{m+1} a^{m+1}\right) x + \frac{b}{(m+1)(m+2)} x^{m+2}$.

Sey $\frac{d^n . y}{dx^n}$ oder $\frac{d.\left(\frac{d^{n-1}.y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} = bx^m$, und n eine positive ganze Zahl,

so ist $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C' + \frac{b}{m+1} x^{m+1}$ (§. 14.).

Also ferner $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = C'' + C'x + \frac{b}{(m+1)(m+2)} x^{m+2}$ (§. 15.).

$$\frac{d^{n-3}.y}{dx^{n-3}} = C''' + C''x + \tfrac{1}{2} C'x^2 + \frac{b}{(m+1)(m+2)(m+3)} x^{m+3}.$$

Allgemein $\frac{d.^{n-r}.y}{dx^{n-r}} = C^{(r)} + C^{(r-1)}x + \tfrac{1}{2} C^{(r-2)}x^2 + .. + \frac{C'}{1.2..(r-1)} x^{r-1}$

$$+ \frac{b}{(m+1)\ldots(m+r)} x^{m+r}.$$

Denn man erhält, wenn man nach §. 15. integrirt,

$$\frac{d.^{n-(r+1)}y}{dx^{n-(r+1)}} = C^{(r+1)} + C^{(r)}x + \tfrac{1}{2} C^{(r-1)}x^2 + \frac{1}{2.3} C^{(r-2)}x^3 + \ldots.$$

$$+ \frac{C'}{1.2\ldots r} x^r + \frac{b}{(m+1)\ldots(m+r)(m+r+1)} x^{m+r+1},$$

welcher Ausdruk aus dem vorhergehenden entsteht, wenn man in demselben $r+1$ statt r sezt.

Man setze in dem Ausdruk des $\frac{d.^{n-r}y}{dx^{n-r}}$ die positive ganze Zahl $r = n - 1$; so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = C^{(n-1)} + C^{(n-2)}x + \tfrac{1}{2} C^{(n-3)}x^2 + \ldots.$$

$$+\frac{C'}{1.2\ldots(n-2)}x^{n-2}+\frac{b}{(m+1)\ldots(m+n-1)}x^{m+n-1},$$

und, wenn man integrirt,

$$y=C^{(n)}+C^{(n-1)}x+\frac{C^{(n-2)}}{1.2}x^2+\frac{C^{(n-3)}}{1.2.3}x^3+\ldots.$$

$$+\frac{C}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1}+\frac{b}{(m+1)\ldots(m+n)}x^{m+n}.$$

In dem besonderen Fall, wo alle diese Differentiale und y selbst für $x=0$ verschwinden sollen, müßen $C^{(n)}$, $C^{(n-1)}$... $C'=0$ seyn, so daß man für diesen Fall hat

$$y=\frac{b}{(m+1)\ldots(m+n)}x^{m+n}.$$

Umgekehrt erhält man, wenn man diesen Ausdruk von y oder den vorhergehenden n mal nach einander differentiirt, nach §. 9.

$$\frac{d.^n y}{dx^n}=bx^m.$$

Denn $\frac{d.C^{(n-1)}x}{dx}=C^{(n-1)}$,

$$d^2.\frac{C^{(n-2)}}{1.2\,dx^2}x^2=C^{(n-2)},$$

$$\vdots$$

$\frac{d.^{n-1}C'x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}=C'$, (§. 9.); folglich verschwinden alle höhere Differentiale dieser Glieder.

Wäre $\frac{d.^n y}{dx^n}$ der constanten Größe C gleich; so würde

$$y=C^{(n)}+C^{(n-1)}x+\frac{C^{(n-2)}}{1.2}x^2+\frac{C^{(n-3)}}{1.2.3}x^3+\ldots.$$

$$+\frac{C'}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1}+\frac{C}{1.2\ldots n}x^n.$$

Das $n$te Differential dieser Function ist constant, so wie das $n$te Differential der Function $\frac{Cx^n}{1.2\ldots n}$, weil n eine positive ganze Zahl ist (§. 9.).

§. 17. Wenn eine veränderliche Größe y eine Function der Summe $x+z$ zweyer von einander unabhängigen Größen x und z ist; so wird man jede dieser zwey Größ-

sen besonders als veränderlich, und die andere als constant betrachten, mithin auch das Differential dieser Function in Beziehung auf x oder in Beziehung auf z nehmen können. Die Exponenten der zwey Differentialverhältniße, welche man erhält, indem man z als constant und x als veränderlich, oder x als constant und z als veränderlich betrachtet, werden aber einander gleich seyn *).

Sey nemlich $y = f(x+z)$; so sind

$f(x+\Delta x+z) - f(x+z)$, und $f(x+z+\Delta z) - f(x+z)$

die Aenderungen, welche diese Function leidet, wenn x in $x+\Delta x$ oder z in $z+\Delta z$ übergeht. Es könne erstlich die Aenderung $f(x+\Delta x+z) - f(x+z)$ in eine Reihe von der Form $P'\Delta x + P''\Delta x^2 +$ &c. entwickelt werden, in welcher P, P'' u. s. w. kein Δx enthalten; so wird man haben

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{f(x+\Delta x+z)-f(x+z)}{\Delta x}\\ \text{oder } \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\end{array}\right\} = P' + P''\Delta x + \text{&c.}$$

und man wird, wenn anders das Differentialverhältniß $dy : dx$ möglich ist, Δx so klein nehmen können, daß die Summe aller auf das Glied P folgenden Glieder kleiner als jede gegebene Größe wird. Folglich wird seyn

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d.\,f(x+z)}{dx}\\ \text{oder } \dfrac{dy}{dx}\end{array}\right\} = P'.$$

Man setze Δz statt Δx; so wird, weil P', P'' u. s. w. vermöge der Voraussetzung kein Δx enthalten,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{f(x+z+\Delta z)-f(x+z)}{\Delta z}\\ \text{oder } \dfrac{\Delta y}{\Delta z}\end{array}\right\} = P' + P''\Delta z + \text{&c.}$$

und man wird durch die Verminderung von Δz, welches jezt die Stelle von Δx vertritt, wiederum die Summe aller auf das Glied P folgenden Glieder kleiner als jede gegebene Größe machen können. Folglich wird seyn

*) *J. F. Pfaff* Programma inaugurale in quo peculiarem differentialia investigandi rationem ex theoria functionum deducit. (*Helmstadii.* 1788.) §. XIII.

$$\left.\begin{matrix}\frac{d.f(x+z)}{dz}\\ \text{oder } \frac{dy}{dz}\end{matrix}\right\} = P' = \left\{\begin{matrix}\frac{d.f(x+z)}{dx}\\ \frac{dy}{dx}.\end{matrix}\right.$$

Es sey zweytens $\frac{f(x+\Delta x+z)-f(x+z)}{\Delta x}$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als eine gegebene Function P' von $x+z$, aber $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}\right\}$ als $P' \pm p$, und die Größe p könne durch die Verminderung von Δx kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden; so ist (§. 9.)

$$\frac{d.f(x+z)}{dx} = P'.$$

Man setze Δz statt Δx, und es sey p' der correspondirende Werth von p; so wird, weil vermöge der Voraussetzung P' kein Δx enthält, $\frac{f(x+z+\Delta z)-f(x+z)}{\Delta x}$ beständig zwischen den Gränzen P' und $P' \pm p'$ enthalten seyn, und man wird, weil p durch die Verminderung von Δz kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden konnte (Voraus.), durch die Verminderung von Δz die Größe p' ebenfalls kleiner machen können als jede gegebene Größe. Folglich wird seyn

$$\frac{d.f(x+z)}{dz} = P' = \frac{d.f(x+z)}{dx}.$$

Weil P' wiederum eine Function von $x+z$ ist; so ist vermöge des bewiesenen

$$\frac{d.P'}{dx} = \frac{d.P'}{dz},$$

$$\text{oder } \frac{d^2 f(x+z)}{dx^2} = \frac{d^2 f(x+z)}{dz^2}, \text{ u. s. w.}$$

Sey z. B. $y = b(x+z)^m$; so ist, wenn man $x+z$ als den ersten, und Δx als den zweyten Theil eines Binomiums betrachtet (§. 2.)

$$(x+z+\Delta x)^m = (x+z)^m + \frac{m}{1}(x+z)^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+z)^{m-2}\Delta x^2 + \&c$$

$$\text{und daher } \frac{\Delta y}{\Delta x} = mb(x+z)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+z)^{m-2}\Delta x + \&c.$$

$$\text{Folglich } \frac{dy}{dx} = mb(x+z)^{m-1} \text{ (§. §. 3. 5. 7.).}$$

Man ſetze Δz ſtatt Δx; ſo erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = mb(x+z)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(x+z)^{m-2}\Delta z + \text{&c.}$$

und $\frac{dy}{dz} = mb(x+z)^{m-1}$ (§. §. 3. 5. 7.)

$$= \frac{dy}{dx}.$$

Alſo iſt auch ferner

$$\frac{d.mb(x+z)^{m-1}}{dx} = \frac{d.mb(x+z)^{m-1}}{dz} = m(m-1)\,b(x+z)^{m-2},$$

d. i. $\frac{d^2.y}{dx^2} = \frac{d^2.y}{dz^2}$, u. ſ. w.

§. 18. Es ſey nun die Aenderung zu beſtimmen, welche eine Function fx der veränderlichen Größe x leidet, wenn x in $x+z$ übergeht, und es ſeyen

$$\frac{d.fx}{dx} = f'x,\ \frac{d^2fx}{dx^2} = f''x,\ \frac{d^3fx}{dx^3} = f'''x,\ \ldots\ \frac{d^nfx}{dx^n} = f^{(n)}x;$$

ſo wird man auch haben (§. 17.)

$$\left.\begin{matrix}\frac{d.f(x+z)}{dx} \\ \frac{d.f(x+z)}{dz}\end{matrix}\right\} = f'(x+z), \text{ und allgemein}$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{d^nf(x+z)}{dx^n} \\ \text{oder } \frac{d^nf(x+z)}{dz^n}\end{matrix}\right\} = f^{(n)}(x+z).$$

Sey 1.) $\frac{d.fx}{dx}$ = einer gegebenen Größe; ſo wird auch ſeyn

$$\frac{d.f(x+z)}{dz} = b,$$

$$d.f(x+z) = bdz, \text{ und wenn man integrirt,}$$

$$f(x+z) = C + bz.$$

Da man nun die Aenderung ſucht, welche dieſe Function leidet, wenn x in $x+z$ übergeht; ſo muß die conſtante C ſo beſtimmt werden, daß das Integral $= fx$ wird, wenn man $z = 0$ ſezt. Man wird alſo zur Beſtimmung von C die Gleichung haben

$$\left.\begin{matrix} f(x+o) \\ fx \end{matrix}\right\} = C+o;$$

folglich ist $f(x+z) = fx + bz = fx + z\frac{d.fx}{dx}$ (Voraussſ.).

Sey 2.) $\frac{d^2fx}{dx^2} = b$; ſo iſt auch

$$\frac{d^2f(x+z)}{dz^2} = b,$$

$$\left.\begin{matrix} d.\left(\frac{d.f(x+z)}{dz}\right) \\ d.f'(x+z) \end{matrix}\right\} = bdz,$$ und wenn man integrirt,

$f'(x+z) = C+bz$. Zur Beſtimmung der Conſtanten hat man $\left.\begin{matrix} f'(x+o) \\ f'x \end{matrix}\right\} = C+o$; folglich iſt

$$\left.\begin{matrix} f'(x+z) \\ d.f(x+z) \\ \hline dz \end{matrix}\right\} = f'x + bz = f'x + zf''x \text{ (Voraussſ.)},$$

oder $d.f(x+z) = f'x.dz + zdz.f''x$.

Man integrire noch einmal, indem man x als einen gegebenen Werth betrachtet, von welchem an die Veränderung der Function gerechnet wird; ſo hat man, weil unter dieſer Vorausſetzung $f'x$ und $f''x$ conſtante Coefficienten ſind, nach §. 15.

$f(x+z) = \text{Const.} + zf'x + \frac{1}{2}z^2f''x$, und wenn man die Conſtante ſo beſtimmt, daß $f(x+z) = fx$ wird für $z=o$; ſo iſt

$f(x+z) = fx + zf'x + \frac{1}{2}z^2f''x$.

Sey 3.) $\frac{d^3fx}{dx^3} = b$; ſo iſt auch

$$\left.\begin{matrix} \frac{d^3f(x+z)}{dz^3} \\ \text{oder } \frac{d^2f'(x+z)}{dz^2} \end{matrix}\right\} = b, \text{ mithin nach n. 2.}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(x+z) \\ d.f(x+z) \\ \hline dz \end{matrix}\right\} = f'x + zf''x + \frac{1}{2}z^2f'''x, \text{ und wenn nach §. 15.}$$

noch einmal integrirt, indem man $f'x$, $f''x$ u. ſ. w. als conſtant betrachtet, und die Conſtante ſo beſtimmt, daß das Integral $= fx$ wird für $z = o$,

$$f(x+z) = fx + zf'x + \frac{z^2}{1.2} f''x + \frac{z^3}{1.2.3} f'''x.$$

Sey $\frac{d^r fx}{dx^r} =$ einer gegebenen Größe b, und für diesen Fall bewiesen, daß

$$f(x+z) = fx + zf'x + \frac{z^2}{1.2} f''x + \ldots + \frac{z^r}{1 \ldots r} f^{(r)}x;$$

so wird dieser Saz auch für eine Function fx gelten, deren $(r+1)$tes Differential constant ist. Sey nemlich in Beziehung auf diese Function

$$\frac{d^{r+1} fx}{dx^{r+1}} = b;$$ so ist auch

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^{r+1} f(x+z)}{dz^{r+1}} \\ \text{oder } \frac{d^r f'(x+z)}{dz^r} \end{array}\right\} = b.$$

Weil nun das $r$te Differential der Function $f'(x+z)$ constant ist; so hat man vermöge der Voraussetzung

$$\left.\begin{array}{l} f'(x+z) \\ \text{oder } \frac{d.f(x+z)}{dz} \end{array}\right\} = f'x + zf''x + \frac{z^2}{1.2} f'''x + \ldots + \frac{z^r}{1 \ldots r} f^{(r+1)}x.$$

Folglich ist, wenn man nach §. 15. integrirt, und die Constante wie bisher bestimmt,

$$f(x+z) = fx + zf'x + \frac{z^2}{1.2} f''x + \frac{z^3}{1.2.3} f'''x + \ldots + \frac{z^{r+1}}{1.2 \ldots r(r+1)} f^{(r+1)}x.$$

Also ist allgemein, wenn das $r$te Differential einer Function fx constant ist,

$$f(x+z) = fx + \frac{z}{1} \cdot \frac{d.fx}{dx} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{d^2 fx}{dx^2} + \frac{z^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 fx}{dx^3} + \ldots + \frac{z^r}{1.2 \ldots r} \frac{d^r fx}{dx^r}$$ *).

Beyspiel. Wenn $fx = x^n$, und n eine positive ganze Zahl ist; so ist, wie §. 8. unabhängig von dem Binomialtheorem bewiesen worden ist,

$$\frac{d.fx}{dx} = nx^{n-1};$$

also ferner (§. 9.) $\frac{d^2 fx}{1.2.dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}$,

*) *Mac Laurin* Treatise of Fluxions, Book I. Prop. XX. Cor. IV. pag. 223.

und allgemein $\frac{d^r fx}{1.2...r.dx^r} = \frac{n(n-1)...(n-(r-1))}{1.2...r} x^{n-r}$,

endlich (§. 9.) $\frac{d^n fx}{1.2...n.dx^n} = 1$.

Folglich ist $(x+z)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}z^2 + ...$

$+ \frac{n(n-1)...(n-(r-1))}{1.2...r} x^{n-r}z^r + ... + z^n$, übereinstimmend mit §. 1.

§. 19. Wenn keines der höheren Differentiale einer Function constant wird; so kann ihre Aenderung oder Differenz, welche der Differenz z von x entspricht, auf folgende Art näherungsweise ausgedrükt werden.

Sey $\frac{d.Fx}{dx} = F'x$;

so ist $\frac{d.F(x+z)}{dx}$

oder (§. 17.) $\frac{d.F(x+z)}{dz}$ $\Big\} = F'(x+z)$,

und man kann, wenn $F'(x+z)$ möglich ist von x an bis $x+z$, und innerhalb dieser Gränzen beständig einerley Zeichen behält, die Größe Δz, welche einen der n gleichen Theile ausdrükt, in die man z eingetheilt hat, so klein nehmen, daß $F(x+z)-Fx$, oder das Integral von $dz\,F'(x+z)$ (so genommen, daß es für $z=0$ verschwindet), zwischen den Gränzen

$\Delta z\,(F'x + F'(x+\Delta z) + ... + F'(x+(n-1)\Delta z))$,

und $\Delta z\,(F'(x+\Delta z) + ... + F'(x+n\Delta z))$

enthalten ist (§. 11.). Folglich wird, wenn $F'x$ innerhalb der angegebenen Gränzen beständig wächst, um so mehr

$F(x+z)-Fx > n\Delta z.\,F'x > zF'x$,

$< n\Delta z.\,F'(x+n\Delta z) < zF'(x+z)$,

und, wenn $F'x$ abnimmt,

$F(x+z)-Fx < zF'x$,

$> zF'(x+z)$ seyn.

Endlich, wenn die Function $F'x$ von x an bis $x+z$ einerley Zeichen behält, und nicht unendlich wird, übrigens aber abwechslungsweise wächst und abnimmt, und $F'(x+p)$

ihr kleinster Werth innerhalb der angegebenen Gränzen, oder noch kleiner als derselbe, $F'(x+q)$ ihr grösster Werth, oder noch grösser als derselbe ist; so wird um so viel mehr

$$F(x+z)-Fx > zF'(x+p),$$
$$< zF'(x+q)$$

seyn, wo also die Grösen p und q zwischen den Gränzen 0 und z begriffen sind.

Sey nun 1.) $\frac{d.fx}{dx} = fx;$

so ist $f(x+z)-fx > zf'(x+p)$
$< zf'(x+q),$

oder $f(x+z) > fx+zf'(x+p),$
$< fx+zf'(x+q).$

Man kehrt die Ungleichheitszeichen um, wenn fx und $f'x$ verschiedene Zeichen haben, und nur auf die absolute Grösse von $f(x+z)$ Rükſicht genommen wird.

Sey 2.) $\frac{d^2fx}{dx^2} = f''x;$

so ist $\frac{d^2f(x+z)}{dz^2}$ } $= f''(x+z),$
oder $\frac{d.f'(x+z)}{dz}$ }

und, wenn p, q die Werthe von z sind, für welche $f''(x+z)$ am kleinsten und am grösten, oder im ersten Fall noch kleiner, im zweyten noch grösser wird; so wird man nach n. 1. haben

$$f'(x+z)-f'x > zf''(x+p),$$
$$< zf''(x+q).$$

Also ist $f'(x+z)$ } $> f'x+zf''(x+p),$
oder $\frac{d.f(x+z)}{dz}$ } $< f'x+zf''(x+q);$

folglich wenn man wie in dem vorhergehenden §. integrirt, indem man x, p und q als gegeben betrachtet,

$$f(x+z)-fx > zf'x+\tfrac{1}{2}z^2f''(x+p),$$
$$< zf'x+\tfrac{1}{2}z^2f''(x+q).$$

Sey 3.) $\frac{d^3fx}{dx^3} = f'''x;$

$$\left.\begin{array}{l}\text{so ist } \frac{d^3 f(x+z)}{dz^3} \\ \text{oder } \frac{d^2 f'(x+z)}{dz^2}\end{array}\right\} = f'''(x+z),$$

und nach n. 2.

$$f'(x+z) > f'x + zf''x + \tfrac{1}{2} z^2 f'''(x+p),$$
$$< f'x + zf''x + \tfrac{1}{2} z^2 f'''(x+q);$$

folglich, wenn man integrirt,

$$f(x+z) - fx > zf'x + \tfrac{1}{2} z^2 f''x + \frac{1}{2.3} z^3 f'''(x+p),$$
$$< zf'x + \tfrac{1}{2} z^2 f''x + \frac{1}{2.3} z^3 f'''(x+q).$$

Und nun kann wie in dem vorhergehenden §. gezeigt worden, daß, wenn $f^{(r)}(x+p)$ der kleinste Werth der Function $f^{(r)}x$ von x an bis $x+z$, oder noch kleiner als derselbe, und $f^{(r)}(x+q)$ der gröste Werth von $f^{(r)}x$ oder noch größer als dieser ist, und diese Function von x an bis $x+z$ beständig einerley Zeichen behält, ohne innerhalb dieser Gränzen jemals unendlich zu werden, allgemein sey

$$f(x+z) > fx + zf'x + \frac{z^2}{1.2} f''x + \frac{z^3}{1.2.3} f'''x + \ldots + \frac{z^r}{1.2\ldots r} f^{(r)}(x+p),$$
$$< fx + zf'x + \frac{z^2}{1.2} f''x + \frac{z^3}{1.2.3} f'''x + \ldots + \frac{z^r}{1.2\ldots r} f^{(r)}(x+q).$$

Man kehrt die Ungleichheitszeichen um, wenn die lezten Glieder dieser Reihen mit der Summe der vorhergehenden Glieder nicht einerley Zeichen haben.

§. 20. Wenn die in dem vorhergehenden §. angegebene Reihe convergirt; so erhält man mittelst derselben die Aenderung oder Differenz einer Function fx einer veränderlichen Größe x, wenn diese in $x+\Delta x$ übergeht, desto genauer, je weiter man sie fortsezt, so daß man hat, wenn man y statt fx, $y+\Delta y$ statt $f(x+\Delta x)$, $\frac{dy}{dx}$ statt $f'x$ u. s. w. sezt

$$y+\Delta y=y+\frac{\Delta x}{1}\frac{dy}{dx}+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots.$$
$$+\frac{\overline{\Delta x}^r}{1.2\ldots r}\frac{d^r y}{\Delta x^r}+\text{&c.}$$

welchen Saz man das Taylorische Theorem nennt *). Einer der einfachsten Beweise dieses wichtigen Sazes scheint folgender zu seyn **).

Sey $f(x+z)=fx+P'z+P''z^2+P'''z^3+..+P^{(r)}z^r+P^{(r+1)}z^{r+1}+\text{&c.}$

und P', P'' u. s. w. seyen Functionen von x allein. Da hier x und z von einander independente veränderliche Größen sind; so kann man jede derselben besonders als veränderlich betrachten. Man differentiire zuerst in Beziehung auf x, indem man z als constant betrachtet; so erhält man

$$\frac{d.f(x+z)}{dx}=\frac{d.fx}{dx}+z\frac{d.P'}{dx}+z^2\frac{d.P''}{dx}+z^3\frac{d.P'''}{dx}+\ldots.$$
$$+z^r\frac{d.P^{(r)}}{dx}+z^{r+1}\frac{d.P^{(r+1)}}{dx}+\text{&c.}$$

Man differentiire obigen Ausdruk in Beziehung auf z, indem man x, folglich auch P', P'' u. s. w. als constant betrachtet; so findet sich

$$\frac{d.f(x+z)}{dz}=P'+2P''z+3P'''z^2+\ldots.$$
$$+rP^{(r)}z^{(r-1)}+(r+1)P^{(r+1)}z^r+\text{&c.}$$

Nun ist aber $\frac{d.f(x+z)}{dx}=\frac{d.f(x+z)}{dz}$ (§. 17.); folglich müßen auch die zwey durch das Differentiiren erhaltene Reihen beständig einander gleich, oder identisch seyn, und man wird haben

$$P'=\frac{d.fx}{dx}.$$

$$2P''=\frac{d.P'}{dx}=\frac{d^2fx}{dx^2};\quad P''=\frac{d^2fx}{2.dx^2}.$$

$$3P'''=\frac{d.P''}{dx}=\frac{d^3fx}{2.dx^3};\quad P'''=\frac{d^3fx}{2.3.dx^3}.$$

.

*) Methodus incrementorum directa es inversa, auctore *Brook Taylor*. (Londini 1715.) Prop. VII. Coroll. 2.

**) *Pfaff* Programma inaug. §. XIII.

$(r+1)\,P^{(r+1)} = \frac{d.\,P^{(r)}}{dx}$; $P^{(r+1)} = \frac{d.\,P^{(r)}}{(r+1)\,dx}$.

Also ist allgemein der Coefficient der $r$ten Potenz von z $P^{(r)} = \frac{d^r fx}{1.2\ldots r\,dx^r}$, weil vermöge der lezten Gleichung

$$P^{(r+1)} = \frac{d.\,P^{(r)}}{(r+1)\,dx} = \frac{d.\,d^r fx}{1.2\ldots r\,(r+1)\,dx^{r+1}} = \frac{d^{r+1} fx}{1.2\ldots(r+1)\,dx^{r+1}},$$

und dieser Ausdruk aus dem unmittelbar vorhergehenden entsteht, wenn man statt r sezt $r+1$.

Ein anderer Beweis dieses Satzes gründet sich auf die Betrachtung der höheren Differenzen. Es ist (§. 9.)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = P' + P''\Delta x + P'''\Delta x^2 + \text{&c.}$$

$$\frac{\Delta^2 . y}{\Delta x^2} = 1.2.\,P'' + 6\,P'''\Delta x + \text{&c.}$$

$$\frac{\Delta^3 . y}{\Delta x^3} = 1.2.3\,P''' + \text{&c.}$$

und mittelst der höheren Differenzen der positiven ganzen Potenzen der natürlichen Zahlen findet sich, daß allgemein

$$\frac{\Delta^r . y}{\Delta x^r} = 1.2.\ldots r.\,P^{(r)} + Q\,\Delta x + \text{&c.}$$

wo die Summe aller auf das erste folgenden Glieder durch die Verminderung von Δx kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann; folglich ist

$\frac{dy}{dx} = P$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = 1.2.\,P''$; $\frac{d^3 y}{dx^3} = 1.2.3.\,P'''$, und allgemein

$\frac{d^r y}{dx^r} = 1.2.\ldots r.\,P^{(r)}$ *).

§. 21.) Zu der Beurtheilung des Fehlers, welchen man begeht, wenn man nur eine gewiße Anzahl von Gliedern der Entwiklung von $f(x+z)$ in eine Reihe in Rechnung nimmt, dient der in dem 18ten §. bewiesene von la Grange erfundene Saz **). Wenn man nemlich bey dem

*) S. Pfleiderers Disputation: Theorematis Tayloriani demonstratio. Tubingæ. 1789.

**) Théorie des fonctions analytiques, n. 53. Leçons sur le calcul des fonctions. Leç. IX. pag. 88. et suiv.

$(r-1)$ten Glied stehen bleibt; so ist der Rest der Reihe zwischen den Gränzen $\frac{z^r}{1.2...r} f^{(r)}(x+p)$ und $\frac{z^r}{1.2..r} f^{(r)}(x+q)$ enthalten, vorausgesezt, daß $f^{(r)}x$ oder $\frac{d^r fx}{dx^r}$ von x an bis $x+z$ einerley Zeichen behalte, und innerhalb dieser Gränzen nicht unendlich werde. Sollte diese Function für gewiße Werthe der veränderlichen Größe unendlich werden; so muß man die zwischen diesen Werthen begriffenen Theile besonders betrachten, auf welche man dieselben Formeln wird anwenden können. Ebenso verfährt man, wenn $\frac{d^r fx}{dx^r}$ abwechselnd positiv und negativ ist.

Weil der Coefficient der $r$ten Potenz von z zwischen $\frac{f^{(r)}(x+p)}{1.2...r}$ und $\frac{f^{(r)}(x+q)}{1.2...r}$ fällt; so wird man ihn $= \frac{f^{(r)}(x+w)}{1.2...r}$ seßen können, wo w eine zwischen o und z begriffene Größe ist. Nach §. 19. wird man also haben

$$f(x+z) = fx + zf'(x+w),$$

$$= fx + zf'x + \frac{z^2}{1.2} f''(x+w),$$

$$= fx + zf'x + \frac{z^2}{1.2} f''x + \frac{z^3}{1.2.3} f'''(x+w),$$

$$= fx + zf'x + \ldots + \frac{z^r}{1.2..r} f^{(r)}(x+w).$$

Differentialrechnung.

Erstes Capitel.

Differentiale der einfachen Functionen.

§. 22. Es ist in dem vorhergehenden Capitel (§. 7. u. 8.) im Allgemeinen gezeigt worden, wie das Gränzverhältniß der zusammengehörigen Veränderungen veränderlicher Größen, welche eine gegebene Beziehung auf einander haben, gefunden, oder eine vorgegebene Function differentiirt werden könne. Diese Operation wird sich auf gewiße allgemeine Regeln bringen lassen, nach welchen die Exponenten der Differentialverhältniße unmittelbar gefunden werden können, ohne vorher die zusammengehörigen Veränderungen oder Differenzen der veränderlichen Größen zu betrachten.

Wir wollen mit den einfachen Functionen den Anfang machen, aus welchen man die übrigen Functionen als zusammengesezt betrachten kann. Diese sind, wenn man wie bisher die gegebene oder constante Größen mit den ersten, und die veränderliche mit den lezten Buchstaben des Alphabeths bezeichnet, folgende:

$y = ax^m$,
$y = b^x$,
$y = \text{Lg.}\, x$,
$y = \text{Sin.}\, x$.

Statt der lezteren hätte man auch irgend eine andere trigonometrische Function, z. B. Cos. x, Tg. x u. s. w. sezen können, weil durch jede dieser Functionen die übrigen gegeben sind. Betrachtet man Sin. x als gegeben; so sind

$\text{Cos.}\, x = \sqrt{1 - \text{Sin.}\, x^2}$; $\text{Tg.}\, x = \frac{\text{Sin.}\, x}{\sqrt{1 - \text{Sin.}\, x^2}}$ u. s. w.

§. 23. Es sey also erstlich y oder $fx = ax^m$, und m eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl; so ist, wie schon §. 7. gezeigt worden ist,

$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$, oder $dy = max^{m-1}dx$.

Hieraus ergiebt sich folgende Regel: der Exponent des Differentialverhältnißes irgend einer Potenz einer veränderlichen Größe ist gleich dem Product aus dem Exponenten der Potenz in die um eine Einheit verminderte Potenz der veränderlichen Größe.

Wenn der Exponent m der Potenz eine Irrationalzahl ist; so kann man immer rationelle Zahlen angeben, zwischen welchen die vorgegebene irrationelle Zahl enthalten ist, und welche um weniger als um eine gegebene Größe von einander verschieden sind. La Grange bemerkt aber, daß es hier mehr auf die Form des Exponenten des Differentialverhältnißes, als auf seinen absoluten Werth in jedem besonderen Fall ankomme, und lehrt den Coefficienten des ersten Glieds der Entwiklung von $(x+\Delta x)^m$ in eine nach den Potenzen von Δx geordnete Reihe, welcher der Exponent des Differentialverhältnißes dieser Function ist, unabhängig von dem Binomialtheorem finden *). Früher schon hat diß J. F. Pfaff kürzer, übrigens auf einen ähnlichen Weg gezeigt **). Das Verfahren ist folgendes.

Weil $(x+\Delta x)^m = x^m\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m$; so kommt es, wenn man zur Abkürzung $\frac{\Delta x}{x} = z$ sezt, darauf an, den Coefficienten von z in der Entwiklung von $(1+z)^m$ zu finden, was auch der Exponent m seyn mag. Da dieser Coefficient von z unabhängig seyn muß; so kann er nur eine Function von m seyn, weil $(1+z)^m$ nur die zwey unbestimmte Größen z und m enthält. Und weil $(1+z)^m$ für $z=0$ der Einheit gleich wird, so wird man, wenn man den Coefficienten von z in der Entwiklung von $(1+z)^m$ irgend einer Function fm von m gleich sezt, haben,

$$(1+z)^m = 1+zfm+\&c.$$

Man wird also auch für irgend einen anderen Exponenten n haben.

$$(1+z)^n = 1+zfn+\&c.$$

*) Leçons sur le calcul des fonctions. Leç. III.
**) Programma inaug. §. V.

und,

und, wenn man diese zwey Ausdrücke mit einander multiplicirt,

$$(1+z)^{m+n} = 1 + zfm + zfn + \&c.$$
$$= 1 + z(fm+fn) + \&c.$$

Aber die Function $(1+z)^m$ wird $(1+z)^{m+n}$ wenn man statt m sezt $m+n$; folglich wird man auch haben $(1+z)^{m+n}$ $= 1 + zf(m+n) + \&c.$ welcher Ausdruk mit dem vorhergehenden identisch seyn muß. Die gesuchte Function von m wird also müßen so beschaffen seyn, daß $f(m+n) = fm + fn$, was auch m und n seyn mögen.

Da nun m und n von einander independente Größen sind; so ist $\frac{d.f(m+n)}{dm} = \frac{d.fm}{dm}$, und $\frac{d.f(m+n)}{dn} = \frac{d.fn}{dn}$, mithin (§. 17.) $\frac{d.fm}{dm} = \frac{d.fn}{dn}$, oder $f'm = f'n$, was auch m und n seyn mögen. Es wird also auch, wenn man $m+\Delta m$ statt n sezt, seyn müßen $f'm = f'(m+\Delta m)$, d. h. die Function $f'm$ wird sich nicht ändern, wenn man $m+\Delta m$ statt m sezt. Demnach wird

$$\left.\begin{matrix} f'm \\ \text{oder } \frac{d\,fm}{dm} \end{matrix}\right\} = \text{einer constanten Größe } C,$$

und (§. 15.) $fm = C' + Cm$ seyn.

Man wird also haben

$$(1+z)^m = 1 + (C' + Cm)z + \&c.$$

Um noch die von m und n independente Größen C' und C zu bestimmen, setze man $m = 0$, und $m = 1$. Die erste Voraussetzung giebt

$$1 = 1 + C'z + \&c., \text{ also } C' = 0,$$

und $(1+z)^m = 1 + Cmz + \&c.$ Macht man jezt $m = 1$; so erhält man

$$1 + z = 1 + Cz + \&c., \text{ und daher } C = 1.$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Also ist } (1+z)^m \\ \text{oder } \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 + mz + \&c. \\ 1 + \frac{m\Delta x}{x} + \&c. \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \text{und } x^m\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m \\ \text{oder } (x+\Delta x)^m \end{matrix}\right\} = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \&c.$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{a(x+\Delta x)^m - ax^m}{\Delta x} \\ \frac{\Delta . ax^m}{\Delta x}\end{matrix}\right\} = max^{m-1} + \&c.$$

Daher $\frac{d.ax^m}{dx} = max^{m-1}$.

§. 24. Hieraus ergiebt sich nun auch das Binomialtheorem auf ähnliche Art, wie in §. 18. Es ist nemlich, wie so eben independent von diesem Saz gezeigt worden ist,

$$\frac{d.x^m}{dx} = mx^{m-1};$$

also $\frac{d^2x^m}{1.2\,dx^2} = \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}$,

und allgemein $\frac{d^r x^m}{1.2...r.dx^r} = m(m-1)...(m-(r-1))x^{m-r}$, wie in §. 9.

Folglich ist nach dem Tayloriſchen Saz (§. 20.)

$$(x+z)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}z^2 + ...$$
$$+ \frac{m(m-1)...(m-(r-1))}{1.2...r} x^{m-r}z^r + \&c.$$

Da in gegenwärtigem Fall $f^{(r)}x$, oder $\frac{d^r x^m}{dx^r} = m(m-1)...(m-(r-1))x^{m-r}$; so kann $f^{(r)}(x+z)$ nur alsdenn unendlich werden, wenn $x+z=0$, und zugleich $m-r$ negativ ist. In den übrigen Fällen hat sie immer einen möglichen Werth, und von x an bis $x+z$ einerley Zeichen. Folglich fällt nach §. 19. $(x+z)^m$

zwiſchen $x^m + \frac{m}{1} x^{m-1}z + ... + \frac{m(m-1)...(m-(r-1))}{1.2....r} x^{m-r}z^r$,

und $x^m + \frac{m}{1} x^{m-1}z + ... + \frac{m(m-1)...(m-(r-1))}{1.2....r}(x+z)^{m-r}z^r$.

§. 25. Sey zweytens $y = b^x$; so ist $y+\Delta y = b^x + \Delta x = b^x b^{\Delta x}$, und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = b^x . \frac{b^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Es ist aber, wenn b größer als die Einheit ist, nach §. 2. n. 9.

$$b^z = 1 + z\frac{b-1}{b} + \frac{z(z+1)}{1.2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \frac{z(z+1)(z+2)}{1.2.3}\left(\frac{b-1}{b}\right)^3 + \ldots$$
$$+ \frac{z(z+1)\ldots(z+r-1)}{1.2\ldots r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r + \&c.$$

folglich ist

$$\frac{b^z-1}{z} = \frac{b-1}{b} + \tfrac{1}{2}(1+z)\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \tfrac{1}{3}(1+z)(1+\tfrac{1}{2}z)\left(\frac{b-1}{b}\right)^3 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{r}(1+z)(1+\tfrac{1}{2}z)\ldots\left(1+\frac{1}{r-1}z\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)^r + \&c.$$
$$> \frac{b-1}{b} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r + \&c.$$

oder, wenn man den Werth dieser durch b gegebenen Reihe, welche geschwinder convergirt als eine geometrische Progression, deren Exponent $= \frac{b-1}{b}$ ist, mit A bezeichnet,

$$\frac{b^z-1}{z} > A.$$

Auf der anderen Seite ist

$$(1+z)(1+\tfrac{1}{2}z) < (1+z)^2 < 1+(1+z)^2-1 < 1+2z(1+z),$$

und allgemein, wenn man in dem §. 8. für $\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x}$ gegebenen Ausdruk $x=1$, und $\Delta x = z$ sezt,

$$(1+z)(1+\tfrac{1}{2}z)\ldots\left(1+\frac{1}{r-1}z\right) < (1+z)^{r-1} < 1+(1+z)^{r-1}-1$$
$$< 1+(r-1)z(1+z)^{r-2};$$

folglich ist $\frac{b^z-1}{z} < \frac{b-1}{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2(1+z) + \frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b}\right)^3(1+2z(1+z)) + \ldots$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r(1+(r-1)z(1+z)^{r-2}) + \&c.$$
$$< \frac{b-1}{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 z + \frac{2}{3}\left(\frac{b-1}{b}\right)^3 z(1+z) + \ldots + \frac{r-1}{r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r z(1+z)^{r-2} + \&c.$$

um so mehr $< A + \left(\frac{b-1}{b}\right)^2 z\left(1 + \frac{b-1}{b}(1+z) + \ldots + \left(\frac{b-1}{b}\right)^{r-2}(1+z)^{r-2} + \&c.\right.$

Der Factor von $\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 z$ ist eine geometrische Progreßion,

deren Exponent $= \frac{b-1}{b}(1+z)$ ist, welcher kleiner als 1 wird, wenn man $z < \frac{1}{b-1}$ macht, weil alsdenn $1+z < 1+\frac{1}{b-1}$ $< \frac{1}{b-1}$ und $\frac{b-1}{b}(1+z) < 1$ ist. Die Gränze dieser Progreßion ist $\frac{1}{1-\frac{b-1}{b}(1+z)}$ oder $\frac{b}{1-(b-1)z}$. Folglich ist, wenn $z < \frac{1}{b-1}$ ist, um so mehr

$$\frac{b^z-1}{z} < A+\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 z\left(\frac{b}{1-(b-1)z}\right)$$

$$< A+\frac{b-1}{b}\cdot\frac{(b-1)z}{1-(b-1)z}.$$

Nun kann durch die Verminderung von z die Größe $\frac{b-1}{b}\cdot\frac{(b-1)z}{1-(b-1)z}$ kleiner gemacht werden als jede gegebene Größe q, wenn man $z < \frac{q}{(b-1)(1+q)}$ macht, weil alsdenn

$(b-1)(1+q)z < q,$

$(b-1)z+(b-1)qz < q,$

$(b-1)z < q-(b-1)qz < q(1-(b-1)z),$

$\frac{(b-1)z}{1-(b-1)z} < q,$ und um so mehr $\frac{b-1}{b}\cdot\frac{(b-1)z}{1-(b-1)z} < q$ ist; folglich kann auch das Produkt dieser Größe durch b^x kleiner gemacht werden als q, wenn man die gegebene Zahl b auf eine Potenz erhebt, deren Exponent n eine positive ganze Zahl und größer als x ist, q' gleich $\frac{q}{b_n}$ oder kleiner macht, und z kleiner als $\frac{q'}{(b-1)(1+q')}$ nimmt.

Es ist also auch

$$\left.\begin{matrix} b^x\cdot\frac{b^{\Delta x}-1}{\Delta x} \\ \text{oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{matrix}\right\} > Ab^x,$$

$$< Ab^x+\frac{b-1}{b}\,b^x\cdot\frac{(b-1)\,\Delta x}{1-(b-1)\,\Delta x},$$

und das zweyte Glied des lezteren Ausdruks kann durch die Verminderung von Δx vermöge des bewiesenen klei-

ner als jede gegebene Größe gemacht werden; folglich ist (§. 8.)

$$\left.\begin{matrix} \frac{dy}{dx} \\ \text{oder } \frac{d.b^x}{dx} \end{matrix}\right\} = Ab^x, \text{ wo die constante Größe } A \text{ durch die Reihe}$$

$$A = \frac{b-1}{b} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r + \text{&c. gegeben ist.}$$

§. 26. Wenn aber b kleiner als 1 ist; so hat man $b^z = (1-(1-b))z$, d. i. wenn man nach dem Binomialtheorem entwickelt,

$$b^z = 1 - z(1-b) + \frac{z(z-1)}{1.2}(1-b)^2 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}(1-b)^3 + \ldots$$
$$+ \frac{z(z-1)\ldots(z-(r-1))}{1.2\ldots r}(1-b)^r + \text{&c.}$$

Man nehme z kleiner als 1; so ist

$$\frac{b^z-1}{z} = -(1-b) - \frac{(1-b)^2}{1.2}(1-z) - \frac{(1-b)^3}{1.2.3}(1-z)(2-z) - \ldots$$
$$- \frac{(1-b)^r}{1.2\ldots r}(1-z)(2-z)\ldots(r-1-z)$$

oder

$$-\frac{b^z-1}{z} = 1 - b + \tfrac{1}{2}(1-b)^2(1-z) + \tfrac{1}{3}(1-b)^3(1-z)(1-\tfrac{1}{2}z) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{r}(1-b)^r(1-z)(1-\tfrac{1}{2}z)\ldots(1-\frac{1}{r-1}z)$$

mithin, wenn man nur auf die absolute Größe von $\frac{b^z-1}{z}$ Rücksicht nimmt,

$$-\frac{b^z-1}{z} < 1 - b + \tfrac{1}{2}(1-b)^2 + \tfrac{1}{3}(1-b)^3 + \ldots + \frac{1}{r}(1-b)^r + \text{&c.}$$
$$< A' \text{ zur Abkürzung,}$$

Auf der anderen Seite ist

$$(1-z)(1-\tfrac{1}{2}z) > (1-z)^2 > 1-2z$$

und allgemein

$$(1-z)(1-\tfrac{1}{2}z)\ldots(1-\frac{1}{r-1}z) > (1-z)^{r-1}$$
$$> 1-(1-(1-z)^{r-1})$$

um so mehr $> 1-(r-1)z$, weil $a^m - b^m < ma^{m-1}(a-b)$ für jede positive ganze Zahl m.

Folglich ist

$$-\frac{bz-1}{z} > 1-b+\tfrac{1}{2}(1-b)^2(1-z)+\tfrac{1}{3}(1-b)^3(1-2z)+\ldots.$$

$$+\frac{1}{r}(1-b)^r(1-(r-1)z)+\&c.$$

$$> A'-\tfrac{1}{2}(1-b)^2 z-\tfrac{2}{3}(1-b)^3 z\ldots-\frac{r-1}{r}(1-b)^r z+\&c.$$

um so mehr $> A'-(1-b)^2 z(1+1-b+\ldots+(1-b)^{r-2}+\&c.)$,

und noch vielmehr $> A'-\frac{(1-b)^2}{b}z$

Es ist also für den Fall, wo b kleiner als die Einheit ist,

$$\left.\begin{array}{l} -b^x.\frac{b^{\Delta x}-1}{\Delta x} \\ \text{oder } -\frac{\Delta y}{\Delta x} \end{array}\right\} < A'b^x,$$

$$\left.\begin{array}{l} -b^x.\frac{b^{\Delta x}-1}{\Delta x} \\ \text{oder } -\frac{\Delta y}{\Delta x} \end{array}\right\} > A'b^x-\frac{(1-b)^2 b^x}{b}\Delta x,$$

und das zweyte Glied des lezteren Ausdruks kann durch Verminderung von Δx kleiner gemacht werden als jede gegebene Grösse q, wenn man Δx kleiner als $\frac{bq}{(1-b)^2}$ macht. Alsdenn ist nemlich $\frac{(1-b)^2}{b}\Delta x < q$, und um so mehr $\frac{(1-b)^2 b^x}{b}\Delta x < q$, weil $b < 1$, mithin auch $b^x < 1$ ist.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Folglich ist } -\frac{dy}{dx} \\ \text{oder } -\frac{d.b^x}{dx} \end{array}\right\} = A'b^x,$$ wo die constante Grösse A' durch die Reihe

$$A' = 1-b+\tfrac{1}{2}(1-b)^2+\ldots+\frac{1}{r}(-b)^r+\&c.$$

gegeben ist.

§. 27. Für den Fall $b > 1$ ist nach §. 25. $\frac{d.b^x}{dx} = Ab^x$; also ist ferner

$$\frac{d^2b^x}{dx^2} = A.Ab^x = A^2b^x,$$

$$\frac{d^3b^x}{dx^3} = A^2.Ab^x = A^3b^x,$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^rb^x}{dx^r} = A^rb^x.$$

Folglich ist nach dem Tayloriſchen Saz

$$\left.\begin{matrix} b^{x+z} \\ b^x b^z \end{matrix}\right\} = b^x + \frac{z}{1} Ab^x + \frac{z^2}{1.2} A^2 b^x + \frac{z^3}{1.2.3} A^3 b^x + \ldots + \frac{z^r}{1.2\ldots r} A^r b^x + \&c.$$

und, wenn man beyderseits mit b^x dividirt,

$$1.)\ b^z = 1 + Az + \frac{(Az)^2}{1.2} + \frac{(Az)^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{(Az)^r}{1.2\ldots r} + \&c.$$

Sezt man $z = 1$; so wird

$$2.)\ b = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{A^r}{1.2\ldots r} + \&c.$$

mittelst welcher Reihe man b findet, wenn A gegeben ist.

Umgekehrt ist nach §. 25.

$$3.)\ A = \frac{b-1}{b} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r + \&c.$$

Es ist aber b^z die Zahl, deren Logarithme z ist in einem System, dessen Basis die Zahl b ist. Ist die Basis b des Logarithmensystems gegeben; so findet man die Zahl A durch n. 3., und mittelst n. 1. die einem gegeben Logarithmen z dieses Systems entsprechende Zahl b^z.

§. 28. Sey drittens $y = \mathrm{Lg.}\ x$ in einem System, dessen Basis b grösser als die Einheit ist; so wird man haben $x = b^y$, und

$$\frac{dx}{dy} = Ab^y \text{ (§. 25.)},$$
$$= Ax,$$

mithin $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x}$,

oder $\frac{d.\,\mathrm{Lg.}\,x}{dx} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{A} x^{-1}$.

Also ist ferner $\frac{d^2\mathrm{Lg.}\,x}{dx^2} = -\frac{1}{A} x^{-2}$ (§. 23.) $= -\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x^2}$.

$$\frac{d^3\mathrm{Lg.}\,x}{dx^3} = \frac{1.2}{A} x^{-3} = \frac{1.2}{A} \cdot \frac{1}{x^3}.$$

$$\frac{d^4\mathrm{Lg.}\,x}{dx^4} = -\frac{1.2.3}{A} x^{-4} = -\frac{1.2.3}{A} \cdot \frac{1}{x^4}$$

Allgemein $\frac{d^r \text{Lg}. x}{dx^r} = \pm \frac{1.2.3...(r-1)}{A} \frac{1}{x^r}$, wo das obere oder untere Zeichen gebraucht wird, je nachdem r eine ungerade oder gerade Zahl ist. Folglich ist nach dem Tayloriſchen Saz

$$\text{Lg}.(x+z) = \text{Lg}. x + \frac{z}{1} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x} - \frac{z^2}{2} \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{z^3}{3} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x^3} - \ldots \pm \frac{z^r}{r} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x^r} \mp \&c.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Lg}.(x+z) - \text{Lg}. x \\ \text{oder Lg}. \frac{x+z}{x} \\ \text{d. i. Lg}.\left(1+\frac{z}{x}\right) \end{array}\right\} = \frac{1}{A}\left(\frac{z}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}\right)^3 - \ldots \pm \frac{1}{r}\left(\frac{z}{x}\right)^r \mp \&c.\right),$$

oder, wenn man $\frac{z}{x} = u$ ſezt

1.) $\text{Lg}.(1+u) = \frac{1}{A}\left(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \ldots \pm \frac{1}{r}u^r \mp \&c.\right)$

welche Reihe convergirt, ſo lange als u nicht größer als 1 iſt.

Man ſeße u negativ; ſo wird

2.) $\text{Lg}.(1-u) = -\frac{1}{A}\left(u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4 + \ldots + \frac{1}{r}u^r + \&c.\right)$

Sey $\frac{1}{1-u} = n$; ſo iſt $u = \frac{n-1}{n}$, und daher

3.) $\text{Lg}. n = -\text{Lg}.(1-u)$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{n-1}{n}\right)^r + \&c.\right) \text{(n. 2.)},$$

welche Reihe für jede Zahl $n > 1$ convergent iſt.

Man ziehe von der Reihe n. 1. die n. 2. ab; ſo erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \text{Lg}.(1+u) - \text{Lg}.(1-u \\ \text{Lg}. \frac{1+u}{1-u} \end{array}\right\} = \frac{2}{A}\left(u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \ldots + \frac{1}{r+1}u^{r+1} + \&c.\right)$$

Alſo iſt, wenn man $\frac{1+u}{1-u} = n$, mithin $u = \frac{n-1}{n+1}$ macht,

4.) $\text{Lg}. n = \frac{2}{A}\left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{r+1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{r+1} + \&c.\right)$,

welche Reihe noch geſchwinder convergirt, als die n. 3.

§. 29. Weil die Basis b eines Logarithmensystems durch A gegeben ist (§. 27. n. 2.); so wird durch A das Logarithmensystem ebenfalls bestimmt. Die einfachste Voraussetzung ist $A = 1$, und alsdenn wird

die Basis $= 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c. (§. 27. n. 2.)

$= 2{,}71828182845904523536$

welchen bestimmten Werth von b man gewöhnlich mit e bezeichnet. Die diesem System zugehörigen Logarithmen heissen natürliche, oder wegen ihrer Beziehung auf die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel hyperbolische Logarithmen. Die in dem vorhergehenden §. gegebenen Formeln geben also die natürlichen Logarithmen, wenn man $A = 1$ sezt, und mittelst dieser erhält man die Logarithmen irgend eines anderen Systems, dessen Basis b ist, oder die so genannten künstlichen Logarithmen, wenn man die natürlichen mit der durch b gegebenen Zahl A dividirt, oder mit $\frac{1}{A}$ multiplicirt. Diese Zahl $\frac{1}{A}$, mit welcher man die natürlichen Logarithmen multipliciren muß, um die irgend einem anderen System zugehörigen Logarithmen zu erhalten, nennt man den **Modulus** dieses Systems. Man bezeichne ihn mit M; so ist $M = \frac{1}{A}$. Es ist aber, wenn $b > 1$ ist,

$$A = \frac{b-1}{b} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{b-1}{b}\right)^r + \text{&c.} \quad \text{(§. 27. n. 3.)}$$

$=$ Lg. nat. b (§. 28. 3.);

folglich ist $M = \frac{1}{\text{Lg. nat. } b}$,

und $\frac{d.b^x}{dx} = b^x \, Lg.nat.\, b$ (§. 25.).

Für den Fall $b < 1$ ist

$\frac{d.b^x}{dx} = -A' b^x$ (§. 26.),

und $A' = 1 - b + \frac{1}{2}(1-b)^2 + \frac{1}{3}(1-b)^3 + \ldots + \frac{1}{r}(1-b)^r +$ &c.

$=$ - Lg. nat. b, wenn man in der Formel §. 28. n. 2. statt $1-u$ sezt b; folglich ist allgemein, b mag gröſser oder kleiner als die Einheit seyn

1.) $\frac{d.b^x}{dx} = b^x \text{Lg. nat. } b.$

Ferner ist $\frac{d.\text{Lg } x}{dx} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x}$ (§. 28.) $= \frac{1}{\text{Lg. nat. } b} \cdot \frac{1}{x}$, und auf ähnliche Art findet sich, wenn $b < 1$ ist, $\frac{d.\text{Lg. } x}{dx} = -\frac{1}{A'} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\text{Lg. nat. } b} \cdot \frac{1}{x}$; folglich ist auch, b mag größer oder kleiner als die Einheit seyn,

2.) $\frac{d.\text{Lg. } x}{dx} = \frac{1}{\text{Lg. nat. } b} \cdot \frac{1}{x} = \frac{M}{x}$.

In Beziehung auf die natürlichen Logarithmen ist $A = 1$, und daher

3.) $\frac{d.e^x}{dx} = e^x$,

4.) $\frac{d.\text{Lg. nat. } x}{dx} = \frac{1}{x}$,

5.) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + .. + \frac{x^r}{1.2...r} + \&c.$ (§. 27. n. 1.).

Sezt man in der Formel §. 27. n. 1. $\frac{1}{A}$ statt x; so erhält man

$b^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ... + \frac{1}{1.2...r}$, oder

6.) $b^{\frac{1}{A}} = e$, und $b = e^A$.

In dem gemeinen oder Briggischen Logarithmensystem ist die Basis $b = 10$. Mittelst der Formeln §. 28. findet man

Lg. nat. 10 = 2,302585092994045684001799....

und daher den Modulus der gemeinen Logarithmen

$\frac{1}{\text{Lg. nat. } 10} = 0,434294481903251827 65....$

In der Folge soll das Zeichen Lg. immer den natürlichen Logarithmen bezeichnen, wenn nicht das Gegentheil erinnert wird.

§. 30. Endlich sey viertens $y = \text{Sin. } x$

Da $\text{Sin.}(x+z) - \text{Sin.}\, x = 2\text{Sin.}\,\frac{1}{2}z\,\text{Cos.}\,(x+\frac{1}{2}z)$; so ist

$$\left.\begin{matrix}\text{Sin.}\,(x+\Delta x)-\text{Sin.}\,x\\ \text{oder } \Delta y\end{matrix}\right\} < \Delta x\,\text{Cos.}\,(x+\tfrac{1}{2}\Delta x),$$

um so mehr $< \Delta x\,\text{Cos.}\,x$.

Auf der anderen Seite ist

$$\text{Sin.}(x+z)-\text{Sin.}\,x = 2\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}z\,\text{Cos.}\,(x+\tfrac{1}{2}z)\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}z,$$
$$> 2\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}z(\text{Cos.}(x+\tfrac{1}{2}z)\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}z - \text{Sin.}\,(x+\tfrac{1}{2}z)\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}z),$$
$$> 2\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}z\,\text{Cos.}\,(x+z),$$

und um so mehr $> z\,\text{Cos.}\,(x+z)$;

folglich ist $\left.\begin{matrix}\text{Sin.}\,(x+\Delta x)-\text{Sin.}\,x\\ \text{oder } \Delta y\end{matrix}\right\} > \Delta x\,\text{Cos.}\,(x+\Delta x)$.

Es ist also $\Delta y : \Delta x < \text{Cos.}\,x : 1$,

$$> \text{Cos.}\,(x+\Delta x) : 1;$$

mithin $dy : dx = \text{Cos.}\,x : 1$ (§. 8.),

oder 1.) $\dfrac{d.\,\text{Sin.}\,x}{dx} = \text{Cos.}\,x$.

Aus dem Differential des Sinus ergeben sich, wie hernach (§. 38.) gezeigt werden soll, die Differentiale der übrigen trigonometrischen Functionen. Unmittelbar erhält man sie auf folgende Art.

Weil $\text{Cos.}\,x - \text{Cos.}\,(x+z) = 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}z\,\text{Sin.}\,(x+\frac{1}{2}z)$,

$$< z\,\text{Sin.}\,(x+\tfrac{1}{2}z),$$

und um so mehr $< z\,\text{Sin.}\,(x+z)$,

auf der anderen Seite aber $= 2\text{Tg.}\,\frac{1}{2}z\,\text{Sin.}\,(x+\frac{1}{2}z)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}z$,

$$> 2\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}z(\text{Sin.}(x+\tfrac{1}{2}z)\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}z - \text{Cos.}\,(x+\tfrac{1}{2}z)\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}z),$$
$$> 2\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}z\,\text{Sin.}\,x,$$

und um so mehr $> z\,\text{Sin.}\,x$;

so ist $-(\text{Cos.}\,(x+\Delta x)-\text{Cos.}\,x) < \Delta x\,\text{Sin.}\,(x+\Delta x)$,

$$> \Delta x\,\text{Sin.}\,x, \text{ und daher}$$

$$-\Delta y : \Delta x > \text{Sin.}\,x : 1,$$

$$< \text{Sin.}\,(x+\Delta x) : 1;$$

folglich ist $-dy : dx = \text{Sin.}\,x : 1$, und

2.) $-\dfrac{d.\,\text{Cos.}\,x}{dx} = \text{Sin.}\,x$,

oder $\dfrac{d.\,\text{Cos.}\,x}{dx} = -\,\text{Sin.}\,x$.

Ferner ist

$$\text{Tg.}\,(x+z)-\text{Tg.}\,x = \frac{\text{Sin.}\,z}{\text{Cos.}\,x\,\text{Cos.}\,(x+z)},$$

$$< \frac{z}{\text{Cos. } x \text{ Cos. } (x+z)} < \frac{z \text{ Sec. } x}{\text{Cos. } (x+z)}$$

$$= \frac{\text{Sin. } z}{\text{Cos. } x\,(\text{Cos. } x \text{ Cos. } z - \text{Sin. } x \text{ Sin. } z)},$$

$$= \frac{\text{Tg. } z}{\overline{\text{Cos. } x}^2 - \text{Sin. } x. \text{Cos, } x \text{ Tg. } z},$$

$$> \frac{\text{Tg. } z}{\overline{\text{Cos. } x}^2},$$

$$\text{um so mehr} > \frac{z}{\overline{\text{Cos. } x}^2};$$

folglich ist, wenn $y = \text{Tg. } x$,

$$\Delta y : \Delta x < \text{Sec. } x : \text{Cos. } (x + \Delta x),$$

$$> \text{Sec. } x : \text{Cos. } x,$$

$$\text{mithin } dy : dx = \text{Sec. } x : \text{Cos. } x,$$

$$= \overline{\text{Sec. } x}^2 : 1,$$

$$\text{und 3.)} \quad \frac{d.\,\text{Tg. } x}{dx} = \overline{\text{Sec. } x}^2 = 1 + \overline{\text{Tg. } x}^2.$$

Endlich ist

$$\text{Sec. } (x+z) - \text{Sec. } x = \frac{1}{\text{Cos. } (x+z)} - \frac{1}{\text{Cos. } x},$$

$$= \frac{\text{Cos. } x - \text{Cos. } (x+z)}{\text{Cos. } x \text{ Cos. } (x+z)},$$

$$= \frac{2\text{Sin. } \frac{1}{2} z \text{ Sin. } (x + \frac{1}{2} z)}{\text{Cos. } x \text{ Cos. } (x+z)},$$

$$< \frac{z \text{ Sin. } (x + \frac{1}{2} z)}{\text{Cos. } x \text{ Cos. } (x+z)},$$

$$\text{um so mehr} < \frac{z \text{ Sin. } (x+z)}{\text{Cos. } x \text{ Cos. } (x+z)},$$

$$< \frac{z \text{ Tg. } (x+z)}{\text{Cos. } x}.$$

$$\text{Aber Sec. } (x+z) - \text{Sec. } x = \frac{2\text{Tg. } \frac{1}{2} z \text{ Sin. } (x + \frac{1}{2} z) \text{Cos. } \frac{1}{2} z}{\text{Cos. } x \text{ Cos. } (x+z)},$$

$$> \frac{2\text{Tg. } \frac{1}{2} z \text{ Sin. } x}{\text{Cos. } x \text{ Cos. } (x+z)},$$

$$> \frac{z \text{ Tg. } x}{\text{Cos. } (x+z)},$$

$$\text{um so mehr} > \frac{z \text{ Tg. } x}{\text{Cos. } x}.$$

Folglich ist, wenn $y = \text{Sec. } x$,

$\Delta y : \Delta x > \text{Tg. } x : \text{Cos. } x,$
$< \text{Tg. } (x+\Delta x) : \text{Cos. } x,$
und daher $dy : dx = \text{Tg. } x : \text{Cos. } x,$
oder 4.) $\frac{d.\,\text{Sec. } x}{dx} = \frac{\text{Tg } x}{\text{Cos. } x} = \text{Tg. } x \,\text{Sec. } x = \text{Sin. } x \,\overline{\text{Sec. } x^2}.$

Das Differential des Cosinus hätte auch aus dem Differential des Sinus auf folgende Art können abgeleitet werden. Es ist, wenn der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser = 1, mit π bezeichnet wird, $\text{Cos. } x = \text{Sin. } (\frac{1}{2}\pi - x)$; folglich

$d.\,\text{Cos. } x = d.\,\text{Sin. } (\frac{1}{2}\pi - x) = \text{Cos. } (\frac{1}{2}\pi - x)\, d.\,(\frac{1}{2}\pi - x)$ (n. 1.)
$= -dx\,\text{Cos. } (\frac{1}{2}\pi - x) = -dx\,\text{Sin. } x.$

Auf ähnliche Art erhält man aus n. 3.

5.) $\frac{d.\,\text{Cotg } x}{dx} = -\overline{\text{Cosec. } x^2},$

und aus n. 4.

6.) $\frac{d\,\text{Cosec. } x}{dx} = -\,\text{Cotg. } x\,\text{Cosec. } x = -\,\text{Cos. } x\,\overline{\text{Cosec. } x^2}.$

Und weil $\text{Sin. vers. } x = 1 - \text{Cos. } x$; so ist

7.) $\frac{d\,\text{Sin. vers. } x}{dx} = -\frac{d.\,\text{Cos. } x}{dx} = \text{Sin. } x$ (n. 2.)

Eben diese Differentiale können auch leicht mittelst einer geometrischen Construction gefunden werden.

§. 31.) Weil $\frac{d\,\text{Sin. } x}{dx} = \text{Cos. } x$ (§. 30. n. 1.);

so ist $\frac{d^2\text{Sin. } x}{dx^2} = \frac{d.\,\text{Cos. } x}{dx} = -\,\text{Sin. } x$ (§. 30. n. 2.);

also ferner $\frac{d^3\text{Sin. } x}{dx^3} = -\,\text{Cos. } x,$

$\frac{d^4\text{Sin. } x}{dx^4} = \text{Sin. } x.$

Allgemein ist $\frac{d^{2r}\text{Sin. } x}{dx^{2r}} = \pm\,\text{Sin. } x,$

$\frac{d^{2r+1}\text{Sin. } x}{dx^{2r+1}} = \pm\,\text{Cos. } x,$ je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist. Folglich ist nach dem Tayloriſchen Saz

$$\text{Sin.}(x+z) = \text{Sin.}\,x + \frac{z}{1}\,\text{Cos.}\,x - \frac{z^2}{1.2}\,\text{Sin.}\,x - \frac{z^3}{1.2.3.}\,\text{Cos.}\,x + \ldots$$
$$\pm \frac{z^{2r}}{1.2\ldots 2r}\,\text{Sin.}\,x$$
$$\pm \frac{z^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1}\,\text{Cos.}\,x + \&c.$$

Man setze z negativ; so ist

$$\text{Sin.}(x-z) = \text{Sin.}\,x - \frac{z}{1}\,\text{Cos.}\,x - \frac{z^2}{1.2}\,\text{Sin.}\,x + \frac{z^3}{1.2.3}\,\text{Cos.}\,x + \ldots$$
$$\pm \frac{z^{2r}}{1.2\ldots 2r}\,\text{Sin.}\,x$$
$$\mp \frac{z^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)}\,\text{Cos.}\,x + \&c.$$

Die Differenz dieser zwey Reihen ist

$$\left.\begin{matrix}\text{Sin.}(x+z) - \text{Sin.}(x+z)\\ \text{oder } 2\,\text{Sin.}\,z\,\text{Cos.}\,x\end{matrix}\right\} = 2\text{Cos.}\,x\left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2\ldots 5} - \ldots \pm \frac{z^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)} \mp \&c.\right),$$

und ihre Summe findet sich

$$\left.\begin{matrix}\text{Sin.}(x+z) + \text{Sin.}(x-z)\\ 2\,\text{Cos.}\,z\,\text{Sin.}\,x\end{matrix}\right\} = 2\,\text{Sin.}\,x\left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{z^{2r}}{1.2\ldots(2r)} \mp \&c.\right)$$

Also ist, wenn man die erste dieser Gleichungen beyderseits mit $2\,\text{Cos.}\,x$, die leztere mit $2\,\text{Sin.}\,x$ dividirt,

$$\text{Sin.}\,z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1\ldots 5} - \ldots \pm \frac{z^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)} \mp \&c.$$

$$\text{Cos.}\,z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1\ldots 4} - \ldots \pm \frac{z^{2r}}{1.2\ldots(2r)} \mp \&c.$$

§. 32. Wenn die Basis der natürlichen Logarithmen mit e bezeichnet wird; so ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^r}{1.2\ldots r}$$ (§. 29. n. 5.)

Man setze x negativ; so erhält man

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{x^r}{1.2\ldots r} - \&c.$$

Die halbe Differenz dieser zwey Reihen ist

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} + \ldots + \frac{x^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)} + \&c.$$

und ihre halbe Summe

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^{2r}}{1.2\ldots(2r)} + \&c.$$

welche Ausdrücke von denen des Sinus und Cosinus von x nur in den Zeichen der Glieder verschieden sind. Man setze $x = z\sqrt{-1}$; so erhält man

$x^2 = -z^2$,
$x^3 = -z^3\sqrt{-1}$,
$x^4 = z^4$,
$x^5 = z^5\sqrt{-1}$,
$x^6 = -z^6$, und allgemein
$x^{2r} = \pm z^{2r}$,
$x^{2r+1} = \pm z^{2r+1}\sqrt{-1}$, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Folglich ist

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = z\sqrt{-1} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{z^{2r+1}\sqrt{-1}}{1.2\ldots(2r+1)} \mp \&c.$$

$$= (\text{Sin.}\, z)\sqrt{-1}\ (\S.\ 31.),$$

oder 1.) $\text{Sin.}\, z = \dfrac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Die zweyte Formel giebt

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{z^{2r}}{1.2\ldots(2r)} \mp \&c.$$

folglich ist (§. 31.)

2.) $\text{Cos.}\, z = \dfrac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$.

Dividirt man die Formel n. 1. mit n. 2; so erhält man

3.) $\text{Tang.}\, z = \dfrac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}})\sqrt{-1}} = \dfrac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2z\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}$.

Aus n. 1. und 2. folgt

4.) $e^{z\sqrt{-1}} = \text{Cos.}\, z + (\text{Sin.}\, z)\sqrt{-1}$, und

5.) $e^{-z\sqrt{-1}} = \text{Cos.}\, z - (\text{Sin.}\, z)\sqrt{-1}$.

Aus n. 3. erhält man

6.) $e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{1+(\text{Tg.}\, z)\sqrt{-1}}{1-(\text{Tg.}\, z)\sqrt{-1}}$; folglich ist

7.) $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{Lg.} \frac{1+(\text{Tg.}\, z)\sqrt{-1}}{1-(\text{Tg.}\, z)\sqrt{-1}}$.

Vermöge §. 28. ist $\text{Lg.} \frac{1+u}{1-u} = 2(u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \text{&c.})$

folglich ist, wenn man $(\text{Tg.}\, z)\sqrt{-1}$ statt u setzt

8.) $z = \text{Tg.}\, z - \frac{1}{3}\overline{\text{Tg.}\, z}^3 + \frac{1}{5}\overline{\text{Tg.}\, z}^5 - \frac{1}{7}\overline{\text{Tg.}\, z}^7 + \text{&c.}$

Setzt man $\text{Tg.}\, z = 1$; so ist $z = \frac{1}{4}\pi$, und daher

$$\pi = 4(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{&c.})$$

$$= 8\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \text{&c.}\right)$$

Setzt man in der Formel n. 4. den Bogen $z = \frac{1}{2}\pi$; so wird $\text{Cos.}\, z = 0$, $\text{Sin.}\, z = 1$, und man erhält $e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$,

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1,\ \pi = \frac{\text{Lg.}\, -1}{\sqrt{-1}}.$$

Es ist aber $\text{Lg.}\, -1 = 2\,\text{Lg.}\, \sqrt{-1}$, oder, wenn man in der Formel §. 28. n. 4. statt n. die imaginäre Größe $\sqrt{-1}$, mithin $\frac{n-1}{n+1}$ oder $\frac{(n-1)^2}{n^2-1} = \sqrt{-1}$ setzt,

$$\left.\begin{matrix} 2\,\text{Lg.}\sqrt{-1} \\ \text{oder } \text{Lg.}\, -1 \end{matrix}\right\} = 4(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \text{&c.})\sqrt{-1};$$

folglich $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{&c.})$, wie vorhin.

Weil $\text{Tg.}\,(a+b) = \frac{\text{Tg.}\, a + \text{Tg.}\, b}{1 - \text{Tg.}\, a\,\text{Tg.}\, b}$; so ist für $a + b = \frac{1}{4}\pi$.

$$\left.\begin{matrix} \text{Tg.}\, \frac{1}{4}\pi \\ \text{oder } 1 \end{matrix}\right\} = \frac{\text{Tg.}\, a + \text{Tg.}\, b}{1 - \text{Tg.}\, a\,\text{Tg.}\, b},$$

$$1 - \text{Tg.}\, a\,\text{Tg.}\, b = \text{Tg.}\, a + \text{Tg.}\, b.$$

Man setze $\text{Tg.}\, a = \frac{1}{2}$; so wird $\text{Tg.}\, b = \frac{1}{3}$, und man erhält nach n. 8.

den Bogen $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \text{&c.}$

den Bogen $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \text{&c.}$

Die Summe dieser zwey Reihen mit 4 multiplicirt giebt

$\pi = 3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \ldots$

§. 33. Aus den Formeln n. 4. u. 5. des vorhergehenden §. erhält man, wenn man mz statt z sezt

$$\text{Cos. } mz + (\text{Sin. } mz)\sqrt{-1} = e^{mz\sqrt{-1}} = (e^{z\sqrt{-1}})^m,$$
$$= (\text{Cos. } z + (\text{Sin. } z)\sqrt{-1})^m,$$

ebenso $\text{Cos. } mz - (\text{Sin. } mz)\sqrt{-1} = (\text{Cos. } z - (\text{Sin. } z)\sqrt{-1})^m$;

folglich ist $\text{Sin. } mz = \frac{(\text{Cos. } z + (\text{Sin. } z)\sqrt{-1})^m - (\text{Cos. } z - (\text{Sin. } z)\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}$,

$$\text{Cos. } mz = \frac{(\text{Cos. } z + (\text{Sin. } z)\sqrt{-1})^m + (\text{Cos. } z - (\text{Sin. } z)\sqrt{-1})^m}{2}.$$

Entwickelt man diese Ausdrücke nach dem Binomialtheorem; so heben sich die imaginären Größen auf, und man erhält folgende Reihen

$$\text{Sin. } mz = m\,\overline{\text{Cos. } z}^{m-1}\,\text{Sin. } z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\overline{\text{Cos. } z}^{m-3}\,\overline{\text{Sin. } z}^{3}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5.}\,\overline{\text{Cos. } z}^{m-5}\,\overline{\text{Sin. } z}^{5} - \text{\&c.}$$

$$\text{Cos. } mz = \overline{\text{Cos. } z}^{m} - \frac{m(m-1)}{1.2}\,\overline{\text{Cos. } z}^{m-2}\,\overline{\text{Sin. } z}^{2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,\overline{\text{Cos. } z}^{m-4}\,\overline{\text{Sin. } z}^{4}$$
$$- \frac{m(m-1)\ldots(m-5)}{1.2\ldots6}\,\overline{\text{Cos. } z}^{m-6}\,\overline{\text{Sin. } z}^{6} + \text{\&c.}$$

Diese Reihen brechen also immer ab, wenn m eine positive ganze Zahl ist.

§. 34. Man hat in dem 30sten §. die trigonometrischen Linien als Functionen der Kreisbogen betrachtet, auf welche sie sich beziehen. Betrachtet man umgekehrt die Kreisbogen als Functionen der trigonometrischen Linien; so hat man, wenn $\text{Sin. } u = x$ ist, $u =$ dem Bogen, dessen Sinus x ist, welches man so ausdrükt: $u = Arc.\,\text{Sin.}\,x$. Ebenso ist, wenn $\text{Tg. } u = x$ ist, $u = Arc.\,\text{Tg.}\,x$, u. s. w.

Sey nun $u = Arc.\,\text{Sin.}\,x$;

so ist $\text{Sin. } u = x$, $\text{Cos. } u = \sqrt{1-x^2}$,

$du\,\text{Cos. } u = dx$ (§. 30. n. 1.),

$$du = \frac{dx}{\text{Cos. } u} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

oder 1.) $d.\,Arc.\,\text{Sin.}\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Sey $u = Arc.\,\text{Cos.}\,x$; so ist $\text{Cos.}\,u = x$, $\text{Sin.}\,u = \sqrt{1-x^2}$;

$du\,\text{Sin.}\,u = -dx$ (§. 30. n. 2.),

$$du = -\frac{dx}{\text{Sin.}\,u} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder 2.) $d.\,Arc.\,\text{Cos.}\,x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Sey $u = Arc.\,\text{Tg.}\,x$; so ist $\text{Tg.}\,u = x$, $\overline{\text{Sec.}\,u}^2 = 1 + x^2$,

$du.\,\overline{\text{Sec.}\,u}^2 = dx$ (§. 30. n. 3.),

$$du = \frac{dx}{\overline{\text{Sec.}\,u}^2} = \frac{dx}{1+x^2},$$

oder 3.) $d.\,Arc.\,\text{Tg.}\,x = \frac{dx}{1+x^2}$.

Ebenso findet sich, wenn $u = Arc.\,\text{Cotg.}\,x$, nach §. 30. n. 5.

4.) $d.\,Arc.\,\text{Cotg.}\,x = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Sey $u = Arc.\,\text{Sec.}\,x$; so ist $\text{Sec.}\,u = x$,

$du\,\text{Tg.}\,u\,\text{Sec.}\,u = dx$ (§. 30. n. 4.),

$$du = \frac{dx}{\text{Tg.}\,u\,\text{Sec.}\,u} = \frac{dx}{\text{Sec.}\,u\sqrt{\overline{\text{Sec.}\,u}^2 - 1}},$$

$$= \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

oder 5.) $d.\,Arc.\,\text{Sec.}\,x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Ebenso 6.) $d.\,Arc.\,\text{Cosec.}\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Endlich sey $u = Arc.\,\text{Sin. vers.}\,x$; so ist $\text{Sin. vers.}\,u = x$,

$du\,\text{Sin.}\,u = dx$ (§. 30. n. 7.),

$$du = \frac{dx}{\text{Sin.}\,u} = \frac{dx}{\sqrt{2\,\text{Sin. vers.}\,u - \overline{\text{Sin. vers.}\,u}^2}},$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}},$$

oder 7.) $d.\,Arc.\,\text{Sin. vers.}\,x = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Weil $d.\,Arc.\,\text{Sin.}\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (n. 1.) $= dx\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, d. i. wenn man nach dem Binomialtheorem entwickelt,

$$= dx\left(1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{24}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\text{\&c.}\right).$$

$$= dx+\tfrac{1}{2}x^2\,dx+\frac{1.3}{2.4}x^4\,dx+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6\,dx+\text{\&c.}$$

so ist, wenn man nach §. 15. integrirt,

$$Arc.\,\text{Sin.}\,x = \text{Const.}+x+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\text{\&c.}$$

wo Const. $= 0$, wenn der Bogen mit seinem Sinus zugleich verschwinden soll.

Es ist also auch

$$u = \text{Sin.}\,u+\tfrac{1}{2}\frac{\overline{\text{Sin.}\,u}^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\overline{\text{Sin.}\,u}^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\overline{\text{Sin.}\,u}^7}{7.}+\text{\&c.}$$

Sezt man Sin. $u = 1$; so ist $u = \frac{1}{2}\pi$, mithin

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5},+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\text{\&c.}$$

Für Sin. $u = \frac{1}{2}$ ist $u = \frac{1}{6}\pi$; also

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7.2^7}+\text{\&c.}$$

Vermöge n. 3. ist

$$d.\,Arc.\,\text{Tg.}\,x = \frac{dx}{1+x^2} = dx\,(1-x^2+x^4-x^6+x^8-\text{\&c.});$$

folglich $Arc.\,\text{Tg.}\,x = \text{Const.}+x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\text{\&c.}$ übereinstimmend mit §. 32. n. 8.

Zweytes Capitel.

Differentiale der zusammengesezten Functionen einer veränderlichen Grösse.

§. 35. Wir wollen nun diejenigen Functionen betrachten, welche aus solchen einfachen Functionen zusammengesezt sind, deren Differentiale nach den in dem vorhergehenden Capitel gegebenen Regeln gefunden werden können. Es sey

$y = a.Fx + b.fx$; so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.\ \frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} + b.\ \frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}.$$

Vermöge des Tayloriſchen Satzes iſt aber

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} = \frac{d.Fx}{dx} + \frac{\Delta x}{1.2}\frac{d^2Fx}{dx^2} + \text{&c.}$$

$$= \frac{d.Fx}{dx} + p \text{ zur Abkürzung,}$$

und ebenſo $\frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x} = \frac{d.fx}{dx} + p'$;

folglich iſt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\ \frac{d.Fx}{dx} + b.\ \frac{d.fx}{dx} + ap + bp'.$

Da vermöge der Vorausſetzung die Exponenten $\frac{d.Fx}{dx}$ und $\frac{d.fx}{dx}$ der Differentialverhältniße möglich ſind; ſo können p und p' durch die Verminderung von Δx kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden. Folglich kann auch $ap+bp'$ kleiner gemacht werden als jede gegebene Größe q, wenn man ſowohl $\frac{p}{a}$ als $\frac{p}{b}$ kleiner als $\frac{1}{2}q$ macht. Es iſt alſo

$$\left.\begin{matrix}\frac{dy}{dx} \\ \text{oder } \frac{d.(a.Fx+bfx)}{dx}\end{matrix}\right\} = a.\ \frac{d.Fx}{dx} + b.\ \frac{d.fx}{dx}.$$

Wenn $y = a.Fx - b.fx$ iſt; ſo kann auf ähnliche Art gezeigt werden, daß

$$\frac{d.(a.Fx-b.fx)}{dx} = a.\ \frac{d.Fx}{dx} - b.\ \frac{d.fx}{dx}.$$

Demnach iſt ferner, wenn $y = P+Q+R$, und P, Q, R Functionen derſelben veränderlichen Größe x ſind,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.(P+Q)}{dx} + \frac{d.R}{dx},$$

$$= \frac{d.P}{dx} + \frac{d.Q}{dx} + \frac{d.R}{dx}.$$

Sey z. B. $y = ax^m + c.b^x + f\,\text{Lg.}\,x + k\,\text{Cos.}\,x$;

ſo iſt $\frac{dy}{dx} = max^{m-1} + c.b^x\,\text{Lg.}\,b + \frac{f}{x} - k\,\text{Sin.}\,x$ (§. 23. 29. 30.).

§. 36. Sey y gleich dem Product $P.Q$ zweyer Func-

tionen P und Q von x, deren Differentiale können angegeben werden; so wird man haben

$$y+\Delta y=(P+\Delta P)(Q+\Delta Q), \text{ und}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=Q.\frac{\Delta P}{\Delta x}+P.\frac{\Delta Q}{\Delta x}+\frac{\Delta P}{\Delta x}.\frac{\Delta Q}{\Delta x}.\Delta x.$$

Es ist aber $\frac{\Delta P}{\Delta x}=\frac{d.P}{dx}+\frac{d^2P}{dx^2}+$ &c.

$$=\frac{d.P}{dx}+p \text{ zur Abkürzung.}$$

Ebenso $\frac{\Delta Q}{\Delta x}=\frac{d.Q}{dx}+q$; folglich ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=Q.\frac{d.P}{dx}+P.\frac{d.Q}{dx}$$
$$+Qp+pQ+\left(\frac{d.P}{dx}+p\right)\left(\frac{d.Q}{dx}+q\right)\Delta x.$$

Da nun die Exponenten $\frac{d.P}{dx}$, $\frac{d.Q}{dx}$ der Differentialverhältnisse von P und Q vermöge der Voraussetzung möglich sind, mithin p und q durch die Verminderung von Δx kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden können; so kann die Summe der auf die zwey ersten folgenden Glieder in dem Ausdruk von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kleiner gemacht werden als jede gegebene Größe a, wenn man p kleiner als jede der Größen $\frac{a}{3Q}$, $\frac{d.P}{dx}$, ferner q kleiner als jede der Größen $\frac{a}{3P}$, $\frac{d.Q}{dx}$, endlich $\Delta x < \frac{a}{12\frac{d.P}{dx}.\frac{d.Q}{dx}}$ macht. Alsdenn ist nemlich um so mehr

$$\Delta x < \frac{a}{3\left(\frac{d.P}{dx}+p\right)\left(\frac{d.Q}{dx}+q\right)},$$

und daher $\left(\frac{d.P}{dx}+p\right)\left(\frac{d.Q}{dx}+p\right)\Delta x < \frac{1}{3}a.$

Ferner $Qp < \frac{1}{3}a,$

$Pq < \frac{1}{3}a,$

mithin $Qp+Pq+\left(\frac{d.P}{dx}+p\right)\left(\frac{d.Q}{dx}+q\right)\Delta x < a.$

Eben dieses gilt um so mehr, wenn $\frac{d.P}{dx}$ und p oder $\frac{d.Q}{dx}$ und q verschiedene Zeichen haben, weil $\frac{d.P}{dx} - p < \frac{d.P}{dx}$, und um so mehr $< \frac{2d.P}{dx}$.

Folglich ist $\left.\begin{matrix} \frac{du}{dx} \\ \text{d. i. } d.\frac{PQ}{dx} \end{matrix}\right\} = Q\frac{d.P}{dx} + P\frac{d.Q}{dx}$,

oder auch $d.P.Q = Qd.P + Pd.Q$.

Sey $y = P.Q.R = (P.Q).R$; so ist

$$\frac{dy}{dx} = R.\frac{d.(P.Q)}{dx} + (P.Q)\frac{d.R}{dx},$$

$$= R\left(Q\frac{dP}{dx} + P\frac{d.Q}{dx}\right) + P.Q\frac{d.R}{dx},$$

$$= Q.R\frac{d.P}{dx} + P.R\frac{d.Q}{dx} + PQ\frac{d.R}{dx},$$

oder $d.P.Q.R = Q.R.d.P + P.R.d.Q + P.Q.d.R$.

Dividirt man beyderseits mit $P.Q.R$; so erhält man

$$\frac{d.P.Q.R}{P.Q.R} = \frac{d.P}{P} + \frac{d.Q}{Q} + \frac{d.R}{R}.$$

Es ist also ferner

$$\frac{d.P.Q.R.S}{P.Q.R.S} = \frac{d.P.Q.R}{P.Q.R} + \frac{d.S}{S},$$

$$= \frac{d.P}{P} + \frac{d.Q}{Q} + \frac{d.R}{R} + \frac{d.S}{S}, \text{ u. s. w.}$$

Da $d.pq = qdp + pdq$; so ist, wenn man $\frac{dp}{dx} = p'$, $\frac{d^2p}{dx^2} = p''$, u. s. w. $\frac{dq}{dx} = q'$, $\frac{d^2q}{dx^2} = q'$, u. s. w. setzt,

$$\frac{d.pq}{dx} = qp' + q'p.$$

$$\frac{d^2pq}{dx^2} = qp'' + p'q' + p'q' + q''p,$$

$$= qp'' + 2p'q' + q''p.$$

$$\frac{d^3pq}{dx^3} = qp''' + p''q' + 2p''q' + 2p'q'' + p'q'' + q'''p,$$

$$= qp''' + 3q'p'' + 3q''p' + q'''p,$$

$$= q\frac{d^3p}{dx^3} + 3\frac{dq}{dx}\frac{d^2p}{dx^2} + 3\frac{d^2q}{dx^2}\frac{dp}{dx} + \frac{d^3q}{dx^3}p.$$

Allgemein ist für jede positive ganze Zahl n

$$\frac{d^n pq}{dx^n} = q\frac{d^n p}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{dq}{dx}\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2q}{dx^2}\frac{d^{n-2}p}{dx^{n-2}} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{1.2\ldots r}\frac{d^r q}{dx^r}\frac{d^{n-r}q}{dx^{n-r}} + \ldots$$

$$+ \frac{n}{1}\frac{d^{n-1}q}{dx^{n-1}}\frac{dp}{dx} + \frac{d^n q}{dx^n}p.$$

§. 37. In dem besonderen Fall, wo die Factoren P, Q u. s. w. einander gleich sind, ist vermöge des vorhergehenden §. $\frac{d.P.P.P\ldots}{P.P.P\ldots} = \frac{d.P}{P} + \frac{d.P}{P} + \frac{d.P}{P} + \&c.$ Also ist, wenn die Anzahl der Factoren $= r$ ist, $\frac{d.P^r}{P_r} = \frac{rd.P}{P}$, und

$$dP = rP^{r-1}d.P,$$

$$\text{oder } \frac{d.P^r}{dx} = rP^{r-1}\frac{d.P}{dx},$$

für jede positive ganze Zahl r.

Es sey aber nun $y = ap^m$, m eine beliebige constante Zahl, und p eine Function von x; so ist, wenn $p+\Delta p$ aus p wird, indem x in $x+\Delta x$ übergeht,

$y+\Delta y = a(p+\Delta p)^m$, d. i. wenn man nach dem Binomialtheorem entwickelt,

$$= a\left(p^m + \frac{m}{1}p^{m-1}\Delta p + \frac{m(m-1)}{1.2}p^{m-2}\overline{\Delta p}^2 + \&c.\right),$$

$$\text{und } \Delta y = \frac{m}{1}ap^{m-1}\Delta p + \frac{m(m-1)}{1.2}ap^{m-2}\overline{\Delta p}^2 + \&c.$$

$$\text{Aber } \Delta p = \Delta x\frac{dp}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2p}{dx^2} + \&c.$$

$$= \Delta x\left(\frac{dp}{dx} + \frac{\Delta x}{1.2}\frac{d^2p}{dx^2} + \&c,\right)$$

$$= \Delta x\left(\frac{dp}{dx} + w\right) \text{ zur Abkürzung;}$$

$$\text{folglich } \frac{\Delta y}{\Delta x} = map^{m-1}\left(\frac{dp}{dx}+w\right) + \frac{m(m-1)}{1.2}ap^{m-2}\left(\frac{dp}{dx}+w\right)\Delta x + \&c.$$

Da nun durch die Verminderung von Δx so wohl Δ

oder $\Delta x\left(\frac{dp}{dx}+w\right)$, als w kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden können; so ist wie in §. 7.

$$\frac{dy}{dx} = map^{m-1}\frac{dp}{dx}$$

Sey z. B. $y=\sqrt{2ax-x^2}=(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$;

so ist $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d.(2ax-x^2)}{dx}$,

$=\frac{1}{2}(2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2a-2x)$ (§. 35.),

$=\sqrt{\frac{a-x}{2ax-x^2}}$.

Nach eben dieser Regel kann das Differential eines Bruchs gefunden werden, dessen Zähler constant, und dessen Nenner eine Function von x ist. Sey nemlich

$y=\frac{a}{P}=a.P^{-1}$; so ist

$$\frac{dy}{dx}=-1.aP^{-2}\frac{d.P}{dx}=-\frac{a.\frac{dP}{dx}}{P^2},$$

oder $dy=-\frac{ad.P}{P^2}$.

§. 38. Sey $y=\frac{P}{Q}=P.\left(\frac{1}{Q}\right)$; so ist (§. 36.)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{Q}\cdot\frac{d.P}{dx}+P.\frac{d.\left(\frac{1}{Q}\right)}{dx},$$

$$=\frac{1}{Q}\frac{d.P}{dx}-P\frac{\frac{d.Q}{dx}}{Q^2},\ (\S.\ 37.),$$

$$=\frac{Q\frac{d.P}{dx}-P.\frac{d.Q}{dx}}{Q^2},$$

oder $dy=\frac{Qd.P-Pd.Q}{Q^2}$.

Mittelst dieser Regeln können nun aus dem Differential des Sinus die Differentiale der übrigen trigonometrischen Linien gefunden werden, wie in dem 30sten §. bemerkt worden ist.

Sey 1.) $y=\text{Cos. }x=(1-\overline{\text{Sin. }x}^2)^{\frac{1}{2}}$;

so ist $dy = \frac{1}{2}(1 - \overline{\text{Sin.}\, x}^2)^{-\frac{1}{2}}\, d.(1 - \overline{\text{Sin.}\, x}^2)$ (§. 37.),

$$= \frac{1}{2\text{Cos.}\, x}(-2\,\text{Sin.}\, x d.\,\text{Sin.}\, x) \text{ (§. 37.)},$$

$$= -\frac{\text{Sin.}\, x}{\text{Cos.}\, x}\, dx.\,\text{Cos.}\, x \text{ (§. 30.)}$$

$$= -\,\text{Sin.}\, x.\, dx.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\,\text{Sin.}\, x.$$

Sey 2.) $y = \text{Tg.}\, x = \frac{\text{Sin.}\, x}{\text{Cos.}\, x}$;

so ist $dy = \frac{\text{Cos.}\, x d.\,\text{Sin.}\, x - \text{Sin.}\, x d.\,\text{Cos.}\, x}{\overline{\text{Cos.}\, x}^2}$ (§. 38.),

$$= \frac{\overline{\text{Cos.}\, x}^2 . dx + \overline{\text{Sin.}\, x}^2 . dx}{\overline{\text{Cos.}\, x}^2} \text{ (n. 1.)},$$

$$= \frac{dx}{\overline{\text{Cos.}\, x}^2}, \text{ weil } \overline{\text{Cos.}\, x}^2 + \overline{\text{Sin.}\, x}^2 = 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\overline{\text{Cos.}\, x}^2} = \overline{\text{Sec.}\, x}^2.$$

Sey 3.) $y = \text{Sec.}\, x = \frac{1}{\text{Cos.}\, x}$;

so ist $dy = \frac{-d.\,\text{Cos.}\, x}{\overline{\text{Cos.}\, x}^2}$ (§. 37.),

$$= \frac{\text{Sin.}\, x.\, dx}{\overline{\text{Cos.}\, x}^2} \text{ (n. 1.)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Sin.}\, x\, \overline{\text{Sec.}\, x}^2.$$

Sey 4.) $y = \text{Cotg.}\, x = \frac{\text{Cos.}\, x}{\text{Sin.}\, x}$;

so ist $dy = \frac{\text{Sin.}\, x d.\,\text{Cos.}\, x - \text{Cos.}\, x d.\,\text{Sin.}\, x}{\overline{\text{Sin.}\, x}^2}$ (§. 38.),

$$= \frac{-\overline{\text{Sin.}\, x}^2 . dx - \overline{\text{Cos.}\, x}^2 . dx}{\overline{\text{Sin.}\, x}^2},$$

$$= -\frac{dx}{\overline{\text{Sin.}\, x}^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\,\overline{\text{Cosec.}\, x}^2.$$

Sey 5.) $y = \text{Cosec. } x = \frac{1}{\text{Sin. } x}$;

so ist $dy = \frac{-d.\text{Sin. } x}{\overline{\text{Sin. } x^2}}$ (§. 37.),

$$= -\frac{\text{Cos. } x.dx}{\overline{\text{Sin. } x^2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{Cos. } x\,\overline{\text{Cosec. } x^2}.$$

§. 39. Sey $y = Fp$ eine Function von p, die veränderliche Größe p aber selbst wiederum eine Function der veränderlichen Größe x. Betrachtet man y als eine Function von p, und sezt $\frac{dy}{dp} = F'p$, $\frac{d^2y}{dp^2} = F''p$, u. s. w.; so hat man nach dem Tayloriſchen Saz

$$\Delta y = \Delta p\,F'p + \frac{\overline{\Delta p^2}}{1.2}F''p + \&c.$$

Es ist aber auch, weil p eine Function von x ist, vermöge eben dieſes Sazes

$$\Delta p = \Delta x\,\frac{\Delta p}{dx} + \frac{\overline{\Delta x^2}}{1.2}\,\frac{d^2p}{dx^2} + \&c.$$

$$= \Delta x\left(\frac{dp}{dx} + w\right) \text{ zur Abkürzung,}$$

wo so wohl Δp als w durch die Verminderung von Δx kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden können.

Subſtituirt man dieſen Ausdruk von Δp in obiger Reihe; so erhält man

$$\Delta y = \Delta x\left(\frac{dp}{dx} + w\right)F'p + \frac{\overline{\Delta x^2}}{1.2}\left(\frac{dp}{dx} + w\right)^2 F''p + \&c.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{dp}{dx} + w\right)F'p + \frac{\Delta x}{1.2}\left(\frac{dp}{dx} + w\right)^2 F''p + \&c.$$

Da nun so wohl w als Δp oder $\Delta x\left(\frac{dp}{dx} + w\right)$ durch die Verminderung von Δx kleiner gemacht werden können, als jede gegebene Größe; so ist

$$\left.\begin{matrix}\frac{dy}{dx} \\ \text{oder } \frac{d.Fp}{dx}\end{matrix}\right\} = F'p.\,\frac{dp}{dx}.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Regel: wenn $y = Fp$ eine Function von p, und p eine Function der veränderlichen Größe x ist; so findet man den Exponenten des Gränzverhältnißes von $\Delta y : \Delta x$, d. i. $\frac{dy}{dx}$, wenn man $F'p$ oder $\frac{dy}{dp}$ nach denselben Regeln sucht, als wenn y eine Function von p wäre, und $F'p$ mit $\frac{dp}{dx}$ multiplicirt.

Sey z. B. $y = \text{Lg.}(ax + x^2) = \text{Lg.}\, p$;

so ist $\frac{dy}{dp} = \frac{1}{p}$ (§. 29. n. 4.),

$\frac{dp}{dx} = a + 2x$ (§. 35.),

$\frac{dy}{dx} = \frac{a+2x}{p} = \frac{a+2x}{ax+x^2}$.

Sey $y = \text{Sin.}(ax + x^2)$; so ist

$\frac{dy}{dx} = \text{Cos.}(ax+x^2)\frac{d.(ax+x^2)}{dx}$ (§. 30. n. 1.),

$= (a + 2x)\,\text{Cos.}(ax + x^2)$.

Sey $y = \text{Lg. Sin.}\, x$; so ist

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d.\,\text{Sin.}\,x}{dx}}{\text{Sin.}\,x}$ (§. 29. n. 4.),

$= \frac{\text{Cos.}\,x}{\text{Sin.}\,x}$ (§. 30. n. 1.), $= \text{Cotg.}\, x$.

Sey $y = ax^m$; so ist $\text{Lg.}\, y = \text{Lg.}\, a + m\,\text{Lg.}\, x$,

und $\frac{dy}{y} = m\,\frac{dx}{x}$ (§. 29. n. 4.),

$\frac{dy}{dx} = \frac{my}{x} = \frac{max^m}{x} = max^{m-1}$, wie in §. 23. 37.

Sey $y = pq$; so ist $\text{Lg.}\, y = \text{Lg.}\, p + \text{Lg.}\, q$,

und $\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} = \frac{qdp + pdq}{pq}$, oder, weil $y = pq$,

$\frac{dy}{dx} = q\,\frac{dp}{dx} + p\,\frac{dq}{dx}$, wie in §. 36.

Sey $y = \frac{p}{q}$; so ist $\text{Lg.}\, y = \text{Lg.}\, p - \text{Lg.}\, q$,

und $\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}$

$$dy = \frac{y}{p}\,dp - \frac{y}{q}\,dq,$$

$$= \frac{dp}{q} - \frac{p\,dq}{q^2} = \frac{q\,dp - p\,dq}{q^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q\,\frac{dp}{dx} - p\,\frac{dq}{dx}}{q^2}, \text{ wie in §. 38.}$$

§. 40. Soll nun die Differenz Δy der Function $y = Fp$, wo p wiederum eine Function von x ist, in eine nach den Potenzen von Δx geordnete Reihe entwickelt werden; so wird man nach dem Tayloriſchen Saz haben

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \&c.$$

Es ist aber $\frac{dy}{dx} = F'p.\frac{dp}{dx}$ (§. 39.), wo $F'p = \frac{d.Fp}{dp}$ so genommeu, als ob y eine Function von p wäre; folglich ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{d.F'p}{dx} + F'p.\frac{d^2p}{dp^2} \text{ (§. 36.)},$$

$$= \frac{dp}{dx}\cdot\frac{d.F'p}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + F'p\,\frac{d^2p}{dx^2} \text{ (§. 39.)},$$

$$= F''p\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + F'p\,\frac{d^2p}{dx^2}, \text{ wo wiederum } F''p = \frac{d.F'p}{dp} \text{ so}$$

genommen, als ob y eine Function von p wäre. Ebenso erhält man ferner nach §. 36. 37. 39.

$$\frac{d^3.y}{dx^3} = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2\frac{d.F''p}{dp}\frac{dp}{dx} + F''p.2\,\frac{dp}{dx}\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p}{dx^2}\frac{d.F'p}{dp}\frac{dp}{dx} + F'p\,\frac{d^3p}{dx^3},$$

$$= F'''p\left(\frac{dp}{dx}\right)^3 + 3F''p.\,\frac{dp}{dx}\frac{d^2p}{dx^2} + F'p\,\frac{d^3p}{dx^3}, \text{ u. s. w.}$$

Also ist $\Delta y = \frac{\Delta x}{1}F'p.\frac{dy}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(F''p\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + F'p\,\frac{d^2p}{dx^2}\right)$

$$+ \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\left(F'''p\left(\frac{dp}{dx}\right)^3 3F''p.\,\frac{dp}{dx}\frac{d^2p}{dx^2} + F'p\,\frac{d^3p}{dx^3}\right)$$

$$+ \&c.$$

Eben dieſe Reihe erhält man auch ſo:
Es iſt, wenn man y als eine Function von p betrachtet,

$$\Delta y = \frac{\Delta p}{1}F'p + \frac{\overline{\Delta p}^2}{1.2}F''p + \&c.$$

Aber $\Delta p = \frac{\Delta x}{1}\frac{dp}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2p}{dx^2} + \&c.$

mithin $\overline{\Delta p}^2 = \overline{\Delta x}^2\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \&c.$, und daher, wenn man dieſe Ausdrücke ſubſtituirt,

$$\Delta y = \left(\Delta x \frac{dp}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2p}{dx^2} + ..\right) F'p$$
$$+ \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + ..\right) F''p$$
$$= \frac{\Delta x}{1} F'p \frac{dp}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(F''p.\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + F'p\frac{d^2p}{dx^2}\right) + \&c. \text{ wie vorhin.}$$

Sey z. B. $y = e^{\text{Sin. x}}$;

ſo iſt $\frac{dy}{dx} = e^{\text{Sin. x}}\frac{d.\,\text{Sin.}\,x}{dx}$ (§. 29. n. 3. u. 4. §. 39.),

$$= e^{\text{Sin. x}}\,\text{Cos.}\,x \text{ (§. 30. n. 1.).}$$

Alſo iſt ferner $\frac{d^2.y}{dx^2} = \text{Cos.}\,x\,.\,e^{\text{Sin. x}} + e^{\text{Sin. x}}d.\,\text{Cos.}\,x$ (§. 36.),

$$= e^{\text{Sin. x}}\overline{\text{Cos.}\,x}^2 - e^{\text{Sin. x}}\,\text{Sin.}\,x,$$

$$\frac{d^3.y}{dx^3} = e^{\text{Sin. x}}\overline{\text{Cos.}\,x}^3 - 2e^{\text{Sin. x}}\,\text{Sin.}\,x\,\text{Cos}\;x - e^{\text{Sin. x}}\,\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x - e^{\text{Sin. x}}\,\text{Cos.}\,x,$$

$$= e^{\text{Sin. x}}\overline{\text{Cos.}\,x}^3 - 3e^{\text{Sin. x}}\,\text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,x - e^{\text{Sin. x}}\,\text{Cos.}\,x.$$

Folglich iſt

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1}e^{\text{Sin. x}}\,\text{Cos.}\,x + \frac{\overline{\Delta x}}{1.2}e^{\text{Sin. x}}(\overline{\text{Cos.}\,x}^2 - \text{Sin.}\,x)$$
$$+ \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}e^{\text{Sin. x}}\,\text{Cos.}\,x\,(\overline{\text{Cos.}\,x}^2 - 3\,\text{Sin.}\,x - 1)$$
$$+ \&c.$$

§. 41. Es ſey $y = F(p, q)$ eine Function der veränderlichen Größen p, q welche ſelbſt wiederum Functionen der veränderlichen Größe x ſeyen, und es werde $p + \Delta p$ aus p, $q + \Delta q$ aus q, wenn man ſtatt x ſezt $x + \Delta x$; ſo wird man haben

$$y + \Delta y = F(p + \Delta p, q + \Delta q).$$

Aenderte ſich allein die Größe p, ſo würde nach dem vorhergehenden §.

$$F(p+\Delta p,q)=F(p,q)+\frac{\Delta x}{1}\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dp^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dp}\frac{d^2p}{dx^2}\right)+\&c.$$

$$=F(p,q)+\frac{\Delta x}{1}\cdot P'+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}P''+\&c.$$

Da aber auch q sich verändert; so wird man in dieser Reihe, welche nur die von der Veränderung der Größe p herrührende Veränderung von y ausdrükt, noch $q+\Delta q$ statt q setzen, und bey dieser zweyten Entwiklung p als constant betrachten müßen. Vermöge dieser Substitution wird nach dem vorhergehenden §.

$F(p,q)$ übergehen in $F(p,q+\Delta q)=F(p,q)+\frac{\Delta x}{1}\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$

$$+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dq^2}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dq}\cdot\frac{d^2q}{dx^2}\right)$$

$$+\&c.$$

$$=F(p,q)+\frac{\Delta x}{1}Q'+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}Q''+\&c.$$

und weil P', P'', u. s. w. so wohl p als q enthalten können, wird

aus P' werden $P'+\frac{\Delta x}{1}\frac{d.P'}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}+\&c.$

aus P'' wird werden $P''+\frac{\Delta x}{1}\frac{d.P''}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}+\&c.$

u. s. w.

so daß der geänderte Werth von y seyn wird

$$y+\Delta y=F(p,q)+\frac{\Delta x}{1}Q'+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}Q''+\&c.$$

$$+\frac{\Delta x}{1}\left(P'+\frac{\Delta x}{1}\frac{d.P'}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}+\&c.\right)$$

$$+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(P''+\frac{\Delta x}{1}\frac{d.P''}{dq}\cdot\frac{\ddot{a}q}{dx}+\&c.\right)$$

$$+\text{etc.}$$

folglich ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}=P'+Q'+\frac{\Delta x}{1.2}\left(Q''+\frac{2d.P'}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}+P''\right)+\text{etc.}$

und $\frac{dy}{dx}=P'+Q'=\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dq}{dx}$,

$$=\frac{d.F(p,q)}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{d.F(p,q)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}.$$

Also ist der Exponent $\frac{dy}{dx}$ des Differentialverhältnißes einer Function $F(p,q)$, welche aus zwey besonderen Functionen p,q derselben veränderlichen Größe x zusammengesezt ist, gleich der Summe der Exponenten der zwey Differentialverhältniße, welche man erhält, indem man zuerst eine dieser Functionen als constant, und die andere als veränderlich, hernach diese als constant, und jene als veränderlich betrachtet.

Es ist z. B. wenn p, q Functionen von x sind,

$\frac{d.pq}{dx}$ in Beziehung auf $p = q\,\frac{dp}{dx}$ { q als constant betrachtet,

$\frac{d.pq}{dx}$ in Beziehung auf $q = p\,\frac{dq}{dx}$ { p als constant betrachtet

und daher das vollständige $\frac{d.pq}{dx} = \frac{qdp}{dx} + \frac{pdq}{dx}$, wie in §. 36.

Ebenso findet sich $\frac{d.\frac{p}{q}}{dx}$ in Beziehung auf $p = \frac{1}{q}\,\frac{dp}{dx}$,

und in Beziehung auf $q = -p.\,\frac{\frac{dq}{dx}}{q^2}$ (§. 37.);

mithin das vollständige $\frac{d.\frac{p}{q}}{dx} = \frac{1}{q}\,\frac{dp}{dx} - p.\,\frac{\frac{dq}{dx}}{q^2}$

$$= \frac{q.\frac{dp}{dx} - p.\frac{dq}{dx}}{q^2},$$ wie in §. 38.

§. 42. Wäre zwischen den zwey veränderlichen Größen y und x eine Gleichung gegeben; so müßte man, um $\frac{dy}{dx}$ nach den bisherigen Regeln angeben zu können, vorher diese Gleichung auflösen, so daß die veränderliche Größe y allein auf die eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht würde. Unmittelbar erhält man aber, ohne die Gleichung vorher aufzulösen, den Exponenten $\frac{dy}{dx}$ des Differentialverhältnißes auf folgende Art. Man denke sich die Gleichung zwischen x und y auf o reducirt; so wird man haben $F(x,y) = o$,

wo die veränderlichen Größen x und y auf irgend eine Art unter sich und mit gegebenen Größen verbunden seyn können, aber so von einander abhängen, daß sich die Glieder dieser Gleichung gegen einander aufheben, was auch die Werthe von x und die ihnen zugehörige Werthe von y seyn mögen. Wenn also $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, zwey andere Werthe von x und y, mithin Δx, Δy zusammengehörige Veränderungen von x und y sind; so wird auch seyn müßen $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, und daher $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$, oder, wenn man zur Abkürzung $F(x, y) = Z$ sezt, $\Delta Z = 0$.

Es ist aber nach dem Taylorischen Saz

$$\Delta Z = \frac{\Delta x}{1} \frac{d.Z}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2} \frac{d^2 Z}{dx^2} + \text{etc.}$$

Folglich wird seyn müßen

$$\frac{\Delta x}{1} \frac{d.Z}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2} \frac{d^2 Z}{dx^2} + \text{etc.} = 0,$$

oder $\frac{d.Z}{dx} + \frac{\Delta x}{1.2} \frac{d^2 Z}{dx^2} + \text{etc.} = 0$, was auch der Werth von Δx seyn mag,

und daher $\frac{d.Z}{dx} = 0$, $\frac{d^2 Z}{dx^2} = 0$, u. s. w., das ist, die verschiedenen Glieder dieser Ausdrücke werden sich gegen einander aufheben müßen. Wäre nemlich $\frac{d.Z}{dx}$ nicht $= 0$; so würde man in obiger für ΔZ gegebenen Reihe Δx so klein nehmen können, daß das erste Glied größer würde als die Summe aller folgenden. Folglich würde für diesen Werth von Δx, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe desselben, die Differenz ΔZ nicht $= 0$. Es ist aber ΔZ beständig $= 0$; folglich muß $\frac{dZ}{dx} = 0$ seyn.

Man wird also ferner haben

$$\frac{\Delta x}{1.2} \frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2.3} \frac{d^3 Z}{dx^3} + \text{etc.} = 0,$$

oder $\frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{\Delta x}{3} \frac{d^3 Z}{dx^3} + \text{etc.} = 0$, was auch der Werth von Δx seyn mag, woraus wie vorhin folgt, daß $\frac{d^2 Z}{dx^2} = 0$, u. s. w.

Da

Da nun $F(x,y)$ beständig $= o$, mithin y eine Function von x ist; so ist nach dem vorhergehenden §.

$\frac{d.Z}{dx} = \frac{d.F(x,y)}{dx} + \frac{d.F(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = o$ (vermöge des Bew.),

und daher $\frac{dy}{dx} = -\frac{d.F(x,y)}{dx} : \frac{d.F(x,y)}{dy}$, wo $\frac{d.F(x,y)}{dx}$ in Beziehung auf x, und $\frac{d.F(x,y)}{dy}$ in Beziehung auf y genommen ist, so daß man bey dem ersten Differentiiren y, bey dem zweyten x als constant betrachtet.

Sey z. B. $x^2 + 2bxy + y^2 - a^2 = o$; so ist

$\frac{d.F(x,y)}{dx} = 2x + 2by$,

$\frac{d.F(x,y)}{dy} = 2bx + 2y$, und daher $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+by}{bx+y}$.

Oder: man differentiire obige Gleichung, indem man x und y als veränderlich betrachtet; so erhält man

$2xdx + 2bydx + 2bxdy + 2ydy = o$,

$x + by + bx\frac{dy}{dx} + y\frac{dy}{dx} = o$,

und $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+by}{bx+y}$ wie vorhin.

Differentiirt man die Gleichung $x + by + bx\frac{dy}{dx} + y\frac{dy}{dx} = o$ noch einmal; so findet man

$1 + b\frac{dy}{dx} + b\frac{dy}{dx} + bx\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = o$,

$(bx+y)\frac{d^2y}{dx^2} = -1 - 2b\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, d. i. wenn man den obigen Werth von $\frac{dy}{dx}$ substituirt,

$= -1 + 2b.\frac{x+by}{bx+y} - \left(\frac{x+by}{bx+y}\right)^2$,

und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{bx+y} + \frac{2b(x+by)}{(bx+y)^2} - \frac{(x+by)^2}{(bx+y)^3}$.

Auf ähnliche Art werden die folgenden Differentiale gefunden.

Diese neuen aus einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Grösßen x und y durch das Differentiiren abgeleiteten Gleichungen nennt man Differentialgleichungen, und zwar der ersten, zweyten, dritten Ordnung, u. s. w. je nachdem nur Differentiale der ersten Ordnung, oder auch Differentiale der zweyten, dritten Ordnung, u. s. w. in denselben vorkommen. Bezeichnet man die Exponenten der in Beziehung auf x und y genommenen Differentialverhältniße beziehungsweise mit P und Q; so ist $P+Q.\frac{dy}{dx}=0$, oder $Pdx+Qdy=0$ die Differentialgleichung der ersten Ordnung, in welcher so wohl P als Q Functionen von y und x zugleich sind. Differentiirt man diese Gleichung aufs neue, so erhält man eine Differentialgleichung der zweyten Ordnung, u. s. w.

§. 43. Die in diesem und in dem vorhergehenden Capitel gegebenen Regeln sind hinreichend, um das Differential einer jeden vorgegebenen Function einer veränderlichen Grösße zu finden, und nach denselben Regeln erhält man die höheren Differentiale aus den unmittelbar vorhergehenden. Nur ist dabey folgendes zu bemerken.

Wenn $y=fx$ eine Function der veränderlichen Grösße x ist; so findet man

$\frac{dy}{dx}=f'x=$ einer neuen Function von x, und hieraus

$$\left.\begin{matrix} d.\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ \frac{d^2y}{dx^2} \end{matrix}\right\} = \frac{d.f'x}{dx} = f''x, \text{ u. s. w.}$$

Ist aber x eine Function einer dritten veränderlichen Grösße t; so ist, wenn man y als eine Function von t betrachtet,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d.fx}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \text{ (§. 39.)},$$

$$= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f'x.\frac{dx}{dt}. \text{ Hieraus erhält man nach §. 36.}$$

$$\frac{d^2.y}{dt^2} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d.f'x}{dt} + f'x.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 f''x + f'x \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$, weil $\frac{d.f'x}{dt} = \frac{d.f'x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ (§. 39.).

Umgekehrt: weil $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$; so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Wenn also y und x Functionen derselben veränderlichen Größe t sind, und daher auch y eine Function von x ist; so ist $\frac{dy}{dx}$ durch $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dx}{dt}$ gegeben, und man kann das Differentialverhältniß $dy : dx$ finden, ohne vorher y durch x auszudrücken, und die dritte veränderliche Größe t herauszuschaffen. Differentiirt man obigen Ausdruk, in welchem so wohl $\frac{dy}{dt}$ als $\frac{dx}{dt}$ Functionen von t sind, oder als solche betrachtet werden, aufs neue nach §. 38.; so erhält man

$$d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{dx}{dt}\, d.\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\, d.\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

$$\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$ und wenn man beyderseits mit $\frac{dt}{dx}$ multiplicirt,

$$\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$ oder, wenn man obigen Werth von $\frac{dy}{dx}$ substituirt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - \frac{\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Da nun, wenn x von keiner dritten veränderlichen Grösse abhängt, $d.x = dx$, $\frac{d.x}{dx} = 1$, mithin $\frac{d^2x}{dx^2} = 0$ ist; so drükt

man diesen Fall auch so aus: dx soll als constant betrachtet werden. Ist hingegen x eine Function von t, z. B. $= at^m$; so ist $\frac{dx}{dt} = mat^{m-1}$ veränderlich, und es giebt zweyte, dritte Differentiale u. s. w. von x. In diesem Fall sagt man, dx soll bey dem ferneren Differentiiren als veränderlich betrachtet werden.

Um diese Regeln durch einige Beyspiele zu erläutern, sey

$$y = a - a\,\text{Cos.}\,t,$$
$$x = at - a\,\text{Sin.}\,t;$$

so ist $\frac{dy}{dt} = a\,\text{Sin.}\,t,$

$$\frac{dx}{dt} = a - a\,\text{Cos.}\,t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Sin.}\,t}{1 - \text{Cos.}\,t} = \text{Cotg.}\,\tfrac{1}{2}t.$$

Ferner ist $\frac{d^2y}{dt^2} = a\,\text{Cos.}\,t,$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,\text{Sin.}\,t;$$

mithin vermöge der in diesem §. gegebenen Ausdrücke

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a\,\text{Cos.}\,t - \frac{a\,\text{Sin.}\,t^2}{1-\text{Cos.}\,t}}{a^2(1-\text{Cos.}\,t)^2}',$$

$$= -\frac{1-\text{Cos.}\,t}{a(1-\text{Cos.}\,t)^3}',$$

$$= -\frac{1}{a(1-\text{Cos.}\,t)^2} = -\frac{1}{4a}\,\text{Cosec.}\,\tfrac{1}{2}t^4.$$

Oder: weil $\frac{dy}{dx} = \text{Cotg.}\,\tfrac{1}{2}t;$

so ist $\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = -\tfrac{1}{2}\,\text{Cosec.}\,\tfrac{1}{2}t^2$ (§. 30. n. 5),

$$\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -\tfrac{1}{2}\frac{dt}{dx}\,\text{Cosec.}\,\tfrac{1}{2}t^2,$$

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\text{Cosec.}\,\frac{1}{2}t^2}{a(1-\text{Cos.}\,t)},$$

oder $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}\,\text{Cosec.}\,\tfrac{1}{2}t^4$, wie vorhin.

Sey $x = \text{Tg. } u$; so ist $u = \textit{Arc.}\ \text{Tg. } x$, und $\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ (§. 34. n. 3.). Hieraus erhält man ferner $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ (§. 37.), u. s. w.

Man erhält aber einfachere Ausdrücke, wenn man $\frac{du}{dx}$ durch u ausdrükt.

Weil $x = \text{Tg. } u$; so ist $1+x^2 = \overline{\text{Sec. } u}^2$, und $\frac{1}{1+x^2} = \overline{\text{Cos. } u}^2$.

Folglich ist

$$\frac{du}{dx} = \overline{\text{Cos. } u}^2.$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -2\frac{du}{dx}\text{Cos. } u \text{ Sin. } u = -2\frac{du}{dx}\text{ Sin. } 2u,$$

$$= -2\overline{\text{Cos. } u}^2 \text{ Sin. } 2u, \text{ weil } \frac{du}{dx} = \overline{\text{Cos. } u}^2.$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 2\frac{du}{dx}\text{ Sin. } 2u \text{ Cos. } u \text{ Sin. } u - 2\frac{du}{dx}\overline{\text{Cos. } u}^2 \text{ Cos. } 2u \text{ (§. 36.)},$$

$$= -2\frac{du}{dx}\text{ Cos. } u\,(\text{Cos. } 2u \text{ Cos. } u - \text{Sin. } 2u \text{ Sin. } u),$$

$$= -2\overline{\text{Cos. } u}^3 \text{ Cos. } 3u.$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = (2.3\,\text{Cos. } 3u\,\overline{\text{Cos. } u}^2 \text{ Sin. } u + 2.3.\overline{\text{Cos. } u}^3 \text{ Sin. } 3u)\frac{du}{dx},$$

$$= 2.3.\frac{du}{dx}\overline{\text{Cos. } u}^2\,(\text{Cos. } 3u \text{ Sin. } u + \text{Sin. } 3u \text{ Cos. } u),$$

$$= 2.3.\overline{\text{Cos. } u}^4 \text{ Sin. } 4u.$$

Allgemein ist für jede positive ganze Zahl r

$$\frac{d^{2r}u}{dx^{2r}} = \pm 2.3.\ldots.(2r-1)\overline{\text{Cos. } u}^{2r} \text{ Sin. } 2ru,$$

$$\frac{d^{2r+1}u}{dx^{2r+1}} = \pm 2.3.\ldots.(2r)\overline{\text{Cos. } u}^{2r+1} \text{ Cos. } (2r+1)u,$$

wo das obere oder untere Zeichen gebraucht wird, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Weil $u + \Delta u = u + \frac{\Delta x}{1}\frac{du}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \text{&c.}$ so hat man in diesem Fall

$$u+\Delta u = u + \frac{\Delta x \text{ Cos. } u}{1}\text{Cos. } u - \frac{(\Delta x \text{Cos. } u)^2}{2}\text{Sin. } 2u - \frac{(\Delta x \text{Cos. } u)^3}{3}\text{ Cos. } 3u$$
$$+ \frac{(\Delta x \text{ Cos. } u)^4}{4}\text{ Sin. } 4u + \frac{(\Delta x \text{Cos. } u)^5}{5}\text{ Cos. } 5u - \ldots.$$

$$\pm \frac{(\Delta x \operatorname{Cos.} u)^{2r}}{2r} \operatorname{Sin.} 2ru \pm \frac{(\Delta x \operatorname{Cos.} u)^{2r+1}}{2r+1} \operatorname{Cos.} (2r+1)u \mp \&c.$$

wo Δu die Zunahme des Bogens ausdrükt, wenn seine Tangente x um Δx wächst *).

Sezt man $u = o$; so werden die Cosinus von u, $3u$, $5u$, u. s. w. $= 1$, die Sinus von $2u$, $4u$ u. s. w. $= o$, und man erhält

$$\Delta u = \Delta x - \frac{\overline{\Delta x}^3}{3} + \frac{\overline{\Delta x}^5}{5} - \&c.$$ übereinstimmend mit §. 32. n. 8.

Drittes Capitel.

Ausdehnung des Tayloriſchen Satzes auf Functionen mehrerer veränderlichen Größen.

§. 44. Wir haben bisher nur Functionen einer veränderlichen Größe betrachtet, weil in denjenigen Fällen, wo eine veränderliche Größe von mehreren anderen zugleich abhieng, dieſe lezteren ebenfalls als von einander abhängig, oder als Functionen einer und derſelben veränderlichen Größe vorausgeſezt wurden, ſo daß mit der Veränderung einer derſelben nothwendig eine Veränderung aller übrigen verbunden war. Es ſey aber nun $z = f(x, y)$ irgend eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Größen x und y; ſo wird man eine dieſer Größen als conſtant, und die andere als veränderlich, mithin z als eine Function der als veränderlich vorausgeſezten Größe betrachten, und das Differential von z in Beziehung auf dieſe veränderliche Größe nehmen können, welches man das partielle Differential (différence partielle, différentielle partielle) von x in Beziehung auf dieſe veränderliche Größe nennt. Man ſetze $x + \Delta x$ ſtatt x, und laſſe y ungeändert; ſo wird man z als eine Function von x betrachten müßen und nach dem Tayloriſchen Saz haben

$$1.) f(x+\Delta x, y) = f(x,y) + \frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3z}{dx^3} + \&c.$$

Betrachtet man aber die Größe x als conſtant, und y als veränderlich, mithin z als eine Function von y; ſo iſt, wenn y in $y + \Delta y$ übergeht,

*) *Euleri* Institution. calc. diff. P. II. Cap. IV. §. 87. Leçons sur le calcul des fonctions, par *Lagrange*. pag. 68.

2.) $f(x,y+\Delta y)=f(x,y)+\frac{\Delta y}{1}\frac{dz}{dy}+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{\overline{\Delta y}^3}{1.2.3}\frac{d^3z}{dy^3}+$ &c.

Man wird also $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ erhalten, wenn man in der Reihe n. 1. die Größe y in $y+\Delta y$ oder in n. 2. die Größe x in $x+\Delta x$ übergehen läßt. Unter der ersten Voraussetzung wird

$$f(x, y+\Delta y)=f(x, y)+\frac{\Delta y}{1}\frac{dz}{dy}+\text{ &c. wie in n. 2.}$$

aus $\frac{dz}{dx}$ wird $\frac{dz}{dx}+\frac{\Delta y}{1}\frac{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy^2}+\frac{\overline{\Delta y}^3}{1.2.3}\frac{d^3\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy^3}+$&c.

aus $\frac{d^2z}{dx^2}$ wird $\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\Delta y}{1}\frac{d.\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dy}+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d.^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dy^2}+$ &c.

aus $\frac{d^3z}{dx^3}$ wird $\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{\Delta y}{1}\frac{d.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{dy}+$ &c.

Substituirt man diese Ausdrücke in n. 1; so erhält man

3.) $f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+\frac{\Delta y}{1}\frac{dz}{dy}+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{\overline{\Delta y}^3}{1.2.3}\frac{d^3z}{dy^3}+$&c.

$$+\frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx}+\frac{\Delta y}{1}.\frac{\Delta x}{1}\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}.\frac{\Delta x}{1}\frac{d^2\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy^2}+\text{&c.}$$

$$+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\Delta y}{1}..\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dy}+\text{&c.}$$

$$+\frac{\overline{\Delta y}^3}{1.2.3}\frac{d^3z}{dx^3}+\text{ &c.}$$

Unter der zweyten Voraussetzung erhält man auf ähnliche Weise

4.) $f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+\frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx}+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3z}{dx^3}+$&c.

$$+\frac{\Delta y}{1}\frac{dz}{dy}+\frac{\Delta x}{1}.\frac{\Delta y}{1}\frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx}+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}.\frac{\Delta y}{1}\frac{d^2\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx^2}+\text{&c.}$$

$$+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{\Delta x}{1}.\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}{dx}+\text{ &c.}$$

$$+\frac{\overline{\Delta y}^3}{1.2.3}\frac{d^3z}{dy^3}+\text{&c.}$$

Die Reihen n. 3. u. 4. müßen identisch seyn, und sie sind es schon in Beziehung auf diejenigen Glieder, welche entweder Δy oder Δx allein enthalten. Vergleicht man die übrigen ähnlichen Glieder mit einander; so findet sich

$$\frac{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}=\frac{d.\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx},$$

$$\frac{d^2\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dy}=\frac{d^2\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx^2},$$

u. s. w.

d. h. man erhält einerley Resultat, man mag zuerst in Beziehung auf x, und hernach in Beziehung auf y, oder in umgekehrter Ordnung differentiiren. Aus der ersten dieser Gleichungen folgen die übrigen.

§. 45. Statt $\frac{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}$ schreibt man auch $\frac{d^2z}{dxdy}$, wo der Zähler anzeigt, daß man zweymal nach einander die Function z differentiirt habe, der Nenner aber, daß es einmal in Beziehung auf x, und einmal in Beziehung auf y geschehen sey. Allgemein statt $\frac{d^m\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)}{dy^m}$ oder statt des gleichbedeutenden Ausdruks $\frac{d^n\left(\frac{d^mz}{dy^m}\right)}{dx^n}$ schreibt man auch $\frac{d^{m+n}z}{dx^n dy^m}$, wo der Zähler anzeigt, daß man $m+n$ mal nach einander differentiirt hat, der Nenner aber, daß es n mal in Beziehung auf x und m mal in Beziehung auf y geschehen ist.

Nach dieser Bezeichnung ist also, wenn $z=f(x,y)$ eine

Function der zwey von einander unabhängigen veränderlichen Größen x und y ist, vermöge des vorhergehenden §.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$
$$+ \frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3z}{dx^3} + \text{&c.}$$
$$+ \frac{\Delta y}{1}\frac{dz}{dy} + \frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{1}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\cdot\frac{\Delta y}{1}\frac{d^3z}{dx^2dy} + \text{&c.}$$
$$+ \frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^3.z}{dx\,dy^2} + \text{&c.}$$
$$+ \frac{\overline{\Delta y}^3}{1.2.3}\frac{d^3z}{dy^3} + \text{&c.}$$
$$= f(x,y) + \tfrac{1}{1}\left(\Delta x\frac{dz}{dx} + \Delta y\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left(\overline{\Delta x}^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2\Delta x.\Delta y\frac{d^2z}{dxdy} + \overline{\Delta y}^2\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\overline{\Delta x}^3\frac{d^3z}{dx^3} + 3\overline{\Delta x}^2.\Delta y.\frac{d^3z}{dx^2dy} + 3\Delta x.\overline{\Delta y}^2\frac{d^3z}{dxdy^2} + \overline{\Delta y}^3\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$
$$+ \text{&c.}$$

Sey z. B. $z = x^2y + y^3$; so findet man

$$\frac{dz}{dx} = 2xy,\ \frac{d^2z}{dx^2} = 2y,\ \frac{d^3z}{dx^3} = 0.$$
$$\frac{dz}{dy} = x^2 + 3y^2,\ \frac{d^2z}{dy^2} = 6y;\ \frac{d^3z}{dy^3} = 6.$$
$$\frac{d^2z}{dydx} = 2x = \frac{d^2z}{dxdy}$$
$$\frac{d^3z}{dydx^2} = 0.$$

Folglich ist $(x+\Delta x)^2(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^3$

$$= x^2y + y^3 + 2xy.\Delta x + y.\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta x}^2\Delta y$$
$$+ (x^2+3y^2)\Delta y + 2x.\Delta x\Delta y + \overline{\Delta y}^3$$
$$+ 3y\overline{\Delta y}^2.$$

§. 46. Eben so wird man verfahren, wenn $z = f(v,x,y)$ eine Function dreyer oder mehrerer veränderlichen Größen ist. Betrachtet man zuerst x und y als veränderlich, und v als constant; so ist nach dem vorhergehenden §.

$$f(v, x+\Delta x, y+\Delta y) = f(v, x, y)$$
$$+\frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx}+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}+\text{&c.}$$
$$+\frac{\Delta y}{1}\frac{dz}{dy}+\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{1}\frac{d^2z}{dxdy}+\text{&c.}$$
$$+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\text{&c.}$$

Man ſetze $v+\Delta v$ ſtatt v; ſo wird

$$f(v+\Delta v, x, y) = f(v, x, y)+\frac{\Delta v}{1}\frac{dz}{dv}+\frac{\overline{\Delta v}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dv^2}+\text{&c.}$$

aus $\frac{dz}{dx}$ wird $\frac{dz}{dx}+\frac{\Delta v}{1}\frac{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dv}+\text{&c.}$

oder $\frac{dz}{dx}+\frac{\Delta v}{1}\frac{d^2z}{dvdx}+\text{&c.}$

aus $\frac{d^2z}{dx^2}$ wird $\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\Delta v}{1}\frac{d^3z}{dvdx^2}+\text{&c.}$

u. ſ. w.

Man wird alſo haben $f(v+\Delta v, x+\Delta x, y+\Delta y) = f(v, x, y)$
$$+\frac{\Delta v}{1}\frac{dz}{dv}+\frac{\overline{\Delta v}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dv^2}+\text{&c.}$$
$$+\frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx}+\frac{\Delta v}{1}\cdot\frac{\Delta x}{1}\frac{d^2z}{dvdx}+\text{&c.}$$
$$+\frac{\Delta y}{1}\frac{dz}{dy}+\frac{\Delta v}{1}\cdot\frac{\Delta y}{1}\frac{d^2z}{dvdy}+\text{&c.}$$
$$+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}+\text{&c.}$$
$$+\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{1}\frac{d^2z}{dxdy}+\text{&c.}$$
$$+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\text{&c.}$$

§. 47. Wenn $z=f(x, y)$ eine Function der zwey von einander unabhängigen Größen x und y iſt; ſo giebt es zwey partielle Differentiale von z, das eine in Beziehung auf x, das andere in Beziehung auf y, welche nach den in dem vorhergehenden Capitel gegebenen Regeln gefunden wer-

den, indem man die eine der veränderlichen Größen als constant betrachtet. Die Exponenten dieser Differentialverhältniße sind im allgemeinen ebenfalls Functionen der zwey veränderlichen Größen zugleich. Es sey $\frac{dz}{dx} = P$, $\frac{dz}{dy} = Q$; so ist

$$\left.\begin{matrix}\frac{d.\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy} \\ \text{oder } \frac{d^2z}{dydx}\end{matrix}\right\} = \frac{dP}{dy}, \text{ und } \left\{\begin{matrix}\frac{d.\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx} \\ \text{oder } \frac{d^2z}{dxdy}\end{matrix}\right\} = \frac{dQ}{dx}.$$

Da nun $\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy}$ (§. 45.);

so ist $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Wenn also zwey Functionen $F(x,y)$, $f(x,y)$ zweyer von einander independenten Größen x und y die Exponenten der partiellen Differentialverhältniße einer Function z eben dieser veränderlichen Größen, die erstere in Beziehung auf x, die leztere in Beziehung auf y genommen, seyn sollen, so muß $\frac{d.F(x,y)}{dy} = \frac{d.f(x,y)}{dx}$, oder diese zwey neuen Functionen von x und y müßen identisch seyn.

Sey z. B. $F(x,y) = 2xy$, und $f(x,y) = x^2 + 3y^2$; so ist

$\frac{d.F(x,y)}{dy} = 2x$, und $\frac{d.f(x,y)}{dx} = 2x$.

Folglich können $2xy$ und $x^2 + 3y^2$ die Exponenten der partiellen Differentialverhältniße einer Function z der von einander unabhängigen veränderlichen Größen x und y seyn. Wirklich ist, wenn $z = x^2y + y^3$,

$$\frac{dz}{dx} = 2xy,$$

$$\frac{dz}{dz} = x^2 + 3y^2.$$

Seyen $F(x,y) = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; so ist

$$\frac{d.F(x,y)}{dy} = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{(2x^2+y^2)y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und $\frac{d.f(x,y)}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

welche zwey Ausdrücke zwar verschieden zu seyn scheinen, aber sich beyde auf folgenden Ausdruk reduciren, $\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Wirklich ist, wenn $z = x\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

und $\frac{dz}{dy} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Findet sich aber $\frac{d.F(x,z)}{dy}$ nicht $= \frac{d.f(x,y)}{dx}$; so giebt es keine Function z zweyer veränderlichen Größen x und y, welche so beschaffen wäre, daß $\frac{dz}{dx} = F(x,y)$, $\frac{dz}{dy} = f(x,y)$, ohne zugleich irgend eine Beziehung zwischen x und y, oder zwischen x, y und z vorauszusetzen, so daß z eine Function von x allein wird.

Sey z. B. $F(x,y) = \frac{3xy^2}{a}$, $f(x,y) = 2by$;

so ist $\frac{d.F(x,y)}{dy} = \frac{6xy}{a}$, und $\frac{d.f(x,y)}{dx} = 0$.

Folglich giebt es keine Function z zweyer von einander independenten veränderlichen Größen x und y, für welche $\frac{dz}{dx} = \frac{3xy^2}{a}$, und $\frac{dz}{dy} = 2by$ wäre, und es muß, wenn der Widerspruch gehoben werden soll, y irgend eine Function von x, mithin nach §. 41.

$\frac{dz}{dx} = \frac{3xy^2}{a} + 2by\frac{dy}{dx}$ seyn.

Man setze $y^2 = ax$; so wird $\frac{2ydy}{dx} = a$, und daher

$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + ab$, $z = \text{Const.} + x^3 + abx = C + x^3 + by^2$.

Man setze allgemein $y = fx$; so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3x.\overline{fx}^2}{a} + 2bfx.\frac{d.fx}{dx} = \frac{3x.\overline{fx}^2}{a} + b\frac{d.\overline{fx}^2}{dx},$$

und $z = C + \frac{3}{a}\int x dx.\overline{fx}^2 + b.\overline{fx}^2$. Die veränderliche

Größe y muß also eine Function von x seyn, aber die Function selbst bleibt unbestimmt. Sezt man $fx=(c^2+x^2)^m$; so erhält man $\int xdx.\overline{fx}^2 = \frac{1}{2}\int xdx\,(c^2+x^2)^{2m} = \frac{1}{2(2m+1)}$ $(c^2+x^2)^{2m+1}$, und

$$z = C + \frac{3}{2(2m+1)a}(c^2+x^2)^{2m+1} + b(c^2+x^2)^{2m},$$

$$= C + \frac{3}{2(2m+1)a}(c^2+x^2)^{2m+1} + by^2, \text{ weil } y=(c^2+x^2)^m.$$

Hieraus erhält man umgekehrt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3x}{a}(c^2+x^2)^{2m} + 2by\frac{dy}{dx},$$

$$= \frac{3xy^2}{a} + 2by\frac{dy}{dx}, \text{ weil } y = fx = (c^2+x^2)^m.$$

§. 48. Auf die Betrachtung der partiellen Differentiale gründet sich der §. 20. gegebene Beweiß des Tayloriſchen Saßes, und mittelſt derſelben können auch die Differentiale der einfachen Functionen einer veränderlichen Größe auf folgende Art gefunden werden *).

Sey 1.) $\frac{d.b^x}{dx} = fx$; ſo iſt auch, wenn z eine von x independente veränderliche Größe iſt,

$$\left.\begin{matrix}\frac{d.b^{x+z}}{dx}\\ \text{oder (§. 17.) } \frac{d.b^{x+z}}{dz}\end{matrix}\right\} = f(x+z).$$

Aber $b^{x+z} = b^x b^z$;

folglich $\frac{d.b^{x+z}}{dx} = b^z\frac{d.b^x}{dx} = b^z fx$,

und $\frac{d.b^{x+z}}{dz} = b^x.\frac{d.b^z}{dz} = b^x fz$.

Demnach muß ſeyn $b^z fx = b^x fz$,

$$\frac{fx}{b^x} = \frac{fz}{b^z} = \text{Const.}$$

*) *J. F. Pfaff* Programma inaugurale.

$$\left.\begin{matrix} \text{und } fx \\ \text{oder } \frac{d.b^x}{dx} \end{matrix}\right\} = C.b^x.$$

Hieraus erhält man wie in §. 27.

$$b^z = 1 + Cz + \frac{(Cz)^2}{1.2} + \frac{(Cz)^3}{1.2.3} + \text{&c.}, \text{ und, wenn man}$$

$Cz = 1$, also $z = \frac{1}{C}$ sezt,

$$b^{\frac{1}{C}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \ldots = e,$$

$b = e^C$, Lgnat. $b = C$ Lgnat. $e = C$, mithin

$$\frac{d.b^x}{dx} = b^x \text{ Lgnat. } b.$$

Sey 2.) $\frac{d.\text{Lg.}x}{dx} = fx$; so ist

$$\frac{d.\text{Lg.}xz}{dx} = f(xz) \quad \frac{d.xz}{dx} = zf(xz), \text{ und}$$

$$\frac{d.\text{Lg.}xz}{dz} = f(xz) \quad \frac{d.xz}{dz} = xf(xz).$$

Aber Lg. xz = Lg. x + Lg. z, und daher

$$\frac{d.\text{Lg.}xz}{dx} = fx, \quad \frac{d.\text{Lg.}xz}{dz} = fz;$$

Folglich muß seyn

$$zf(xz) = fx, \text{ und } xf(xz) = fz,$$
$$xzf(xz) = xfx, \quad xzf(xz) = zfz,$$
$$xfx = zfz = \text{Const.}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Also ist } fx \\ \text{oder } \frac{d.\text{Lg.}x}{dx} \end{matrix}\right\} = \frac{C'}{x}.$$

Aus dem logarithmischen Differential erhält man, wie in dem 39sten §. gezeigt worden ist,

$$\frac{d.x^m}{dx} = mx^{m-1},$$

und $\frac{d.pq}{dx} = q\frac{dp}{dx} + p\frac{dq}{dx}$.

Mittelst des lezteren findet man das erste auch so:

Sey 3.) $\frac{d.x^m}{dx} = Fx$; so ist auch, wenn z eine von x unabhängige veränderliche Größe ist,

$$\frac{d.(xz)^m}{dx} = F(xz)\,\frac{d.xz}{dx} = zF(xz),$$

$$\frac{d.(xz)^m}{dz} = F(xz)\,\frac{d.xz}{dz} = xF(xz).$$

Da nun $(xz)^m = x^m z^m$; so ist

$$\frac{d.(xz)^m}{dx} = z^m\,\frac{d.x^m}{dx} = z^m Fx,$$

$$\frac{d.(xz)^m}{dz} = x^m\,\frac{d.z^m}{dz} = x^m Fz, \text{ und daher}$$

$$zF(xz) = z^m Fx, \quad F(xz) = z^{m-1}Fx,$$
$$xF(xz) = x^m Fz, \quad F(xz) = x^{m-1}Fz.$$

Folglich ist $z^{m-1}Fx = x^{m-1}Fz$,

$$\frac{Fx}{x^{m-1}} = \frac{Fz}{z^{m-1}} = \text{einer von } x \text{ und } z \text{ unabhängigen Größe,}$$

welche nur eine Function des Exponenten m seyn kann. Man setze sie also $= fm$, so wird man haben

$$\frac{d.x^m}{dx} = x^{m-1}fm, \text{ und } \frac{d.x^n}{dx} = x^{n-1}fn, \quad \frac{d.x^{m+n}}{dx} = x^{m+n-1}f(m+n).$$

Da nun $x^{m+n} = x^m.x^n$; so ist

$$\frac{d.x^{m+n}}{dx} = x^n\,\frac{d.x^m}{dx} + x^m\,\frac{d.x^n}{dx} + x^n.x^{m-1}fm + x^m.x^{n-1}fn,$$
$$= x^{m+n-1}(fm+fn).$$

Demnach muß seyn $f(m+n) = fm + fn$, woraus man, wie in dem 23sten §. gezeigt worden ist, $fm = C' + Cm$ findet.

Es ist also auch $fn = C' + Cn$, und $f(m+n) = C' + C(m+n)$.

Nun soll $fm + fn = f(m+n)$,

d. i. $2C' + C'(m+n) = C' + C(m+n)$ seyn; folglich muß $C' = 0$, und

$fm = Cm$ seyn, so daß $\frac{d.x^m}{dx} = Cmx^{m-1}$ wird.

Für $m = 1$ wird $\frac{d.x}{dx} = C.1$, welches $= 1$ seyn muß.

Man hat also $C = 1$, und $\frac{d.x^m}{dx} = mx^{m-1}$.

Sey 4.) $\frac{d.\,\text{Sin.}\,x}{dx} = fx.$

Da $\overline{\text{Sin.}\,x}^2 + \overline{\text{Cos.}\,x}^2 = 1$;

so ist $2\,\text{Sin.}\,x\,\frac{d.\,\text{Sin.}\,x}{dx} + 2\,\text{Cos.}\,x\,\frac{d.\,\text{Cos.}\,x}{dx} = 0$,

und daher $\text{Sin.}\,x.\,fx + \text{Cos.}\,x\,\frac{d.\,\text{Cos.}\,x}{dx} = 0$,

$$\frac{d.\,\text{Cos.}\,x}{dx} = -\frac{fx\,\text{Sin.}\,x}{\text{Cos.}\,x}.$$

Weil ferner $\text{Sin.}\,(x+z) = \text{Sin.}\,x\,\text{Cos.}\,z + \text{Cos.}\,x\,\text{Sin.}\,z$;

$$\text{so ist } \frac{d.\,\text{Sin.}\,(x+z)}{dx} = \text{Cos.}\,z\,\frac{d.\,\text{Sin.}\,x}{dx} + \text{Sin.}\,z\,\frac{d.\,\text{Cos.}\,x}{dx},$$

$$= fx\,\text{Cos.}\,z - fx.\,\frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Cos.}\,x}\,\text{Sin.}\,z,$$

$$= \frac{fx}{\text{Cos.}\,x}(\text{Cos.}\,x\text{Cos.}\,z - \text{Sin.}\,x\text{Sin.}\,z),$$

$$= fx.\,\frac{\text{Cos.}\,(x+z)}{\text{Cos.}\,x},$$

$$\text{und } \frac{d.\,\text{Sin.}\,(x+z)}{dz} = \text{Sin.}\,x\,\frac{d.\,\text{Cos.}\,z}{dz} + \text{Cos.}\,x.\,\frac{d.\,\text{Sin.}\,z}{dz},$$

$$= -fz.\,\frac{\text{Sin.}\,z}{\text{Cos.}\,z}\,\text{Sin.}\,x + \text{Cos.}\,x.fz,$$

$$= \frac{fz}{\text{Cos.}\,z}(-\text{Sin.}\,x\text{Sin.}\,z + \text{Cos.}\,x\text{Cos.}\,z),$$

$$= fz.\,\frac{\text{Cos.}\,(x+z)}{\text{Cos.}\,z}.$$

$$\text{Aber } \frac{d.\,\text{Sin.}\,(x+z)}{dx} = \frac{d.\,\text{Sin.}\,(x+z)}{dz} \text{ (§. 17.)};$$

$$\text{folglich } fx\,\frac{\text{Cos.}\,(x+z)}{\text{Cos.}\,x} = fz\,\frac{\text{Cos.}\,(x+z)}{\text{Cos.}\,z},$$

$$\frac{fx}{\text{Cos.}\,x} = \frac{fz}{\text{Cos.}\,z} = C,$$

$$\frac{d.\,\text{Sin.}\,x}{dx} = fx = C\,\text{Cos.}\,x,$$

$$\frac{d.\,\text{Cos.}\,x}{dx} = -C\,\text{Cos.}\,x\,\frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Cos.}\,x} = -C\,\text{Sin.}\,x.$$

$$\frac{d^2.\text{Sin.}\,x}{dx^2} = \frac{d.\,C.\,\text{Cos.}\,x}{dx} = -\,C^2\,\text{Sin.}\,x\text{, u. s. w.}$$

woraus man wie in dem 31sten §. erhält

$$\text{Sin.}\,z = Cz - \frac{(Cz)^3}{1.2.3} + \text{\&c.}$$

$$\frac{\text{Sin.}\,z}{z} = C\left(1 - \frac{(Cz)^2}{1.2.3} + \text{\&c.}\right)$$

Nun ist die Gränze von $\frac{\text{Sin.}\,z}{z} = 1$; folglich muß $C = 1$ seyn.

Demnach ist $\frac{d.\,\text{Sin.}\,x}{dx} = \text{Cos.}\,x$

und $\frac{d.\,\text{Cos.}\,x}{dx} = -\,\text{Sin.}\,x.$

§. 49. Auf ähnliche Art kann man untersuchen, ob die gewißen Functionen zukommende Eigenschaften nur bey diesen Functionen statt finden, oder auch noch anderen Functionen zukommen *). Es ist z. B. $\text{Lg.}\,x + \text{Lg.}\,z = \text{Lg.}\,xz$, und es werde eine andere Function fx von x gesucht, welche so beschaffen sey, daß, wenn z eine von x independente veränderliche Größe ist

$$fx + fz = f(xz).$$

Man setze $\frac{d.fx}{dx} = f'x$; so wird man haben

$$f'x = f'(xz)\,\frac{d.\,xz}{dx} = zf'(xz),$$

$$\text{und } f'z = f'(xz)\,\frac{d.\,xz}{dz} = xf'(xz).$$

$$\text{Folglich ist so wohl } \left.\begin{matrix} xf'x \\ \text{als } zf'z \end{matrix}\right\} = xzf'(xz),$$

und daher $xf'x = zf'z = \text{Const.}$

$$\text{oder } \left.\frac{f'x}{\frac{d.fx}{dx}}\right\} = \frac{C}{x} = C.\,\frac{d.\,\text{Lg. nat.}\,x}{dx} \text{ (§. 29. n. 4.).}$$

Also ist $fx = C' + C\,\text{Lg. nat.}\,x,$

$$fz = C' + C\,\text{Lg. nat.}\,z,$$

*) *J. F. Pfaff.* Progr. §. IV.

$$fx+fz = 2C' + C(\text{Lg. nat. } x + \text{Lg. nat. } z),$$
$$= 2C' + C\,\text{Lg. nat. } xz.$$

Aber $f(xz) = C' + C\,\text{Lg. nat. } xz$, wenn man xz statt x sezt.

Folglich muß $fx = C\,\text{Lg. nat. } x$, d. i. dem Logarithmen von x in irgend einem System gleich seyn, und nur die zu einerley System gehörigen Logarithmen haben die Eigenschaft, daß $fx+fz = f(xz)$.

Es seyen x und z zwey von einander independente Winkel oder Kreisbogen; so ist

$$\text{Sin.}(x+z) = \text{Sin. } x\,\text{Cos. } z + \text{Cos. } x\,\text{Sin. } z,$$
$$= \text{Sin. } x\,(1-\overline{\text{Sin. } z}^2)^{\frac{1}{2}} + \text{Sin. } z\,(1-\overline{\text{Sin. } x}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Sey fx eine andere Function von x, welcher eine ähnliche Eigenschaft zukomme, so daß

$$f(x+z) = fx\,(1-\overline{fz}^2)^{\frac{1}{2}} + fz\,(1-\overline{fx}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Man differentiire diese Gleichung in Beziehung auf x, und setze $\frac{d.fx}{dx} = f'x$; so wird man haben

$$\frac{d.f(x+z)}{dx} = f'x\,(1-\overline{fz}^2)^{\frac{1}{2}} - fz.fx.f'x\,(1-\overline{fx}^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$= \frac{f'x}{\sqrt{1-\overline{fx}^2}}\,((1-\overline{fz}^2)^{\frac{1}{2}}(1-\overline{fx}^2)^{\frac{1}{2}} - fz.fx).$$

Ebenso findet sich, wenn man in Beziehung auf z differentiirt,

$$\frac{d.f(x+z)}{dz} = \frac{f'z}{\sqrt{1-\overline{fz}^2}}\,((1-\overline{fx}^2)^{\frac{1}{2}}(1-\overline{fz}^2)^{\frac{1}{2}} - fx.fz).$$

Vermöge §. 17. und wegen der Gleichheit der in die Parenthese eingeschlossenen Factoren ist

$$\frac{f'x}{\sqrt{1-\overline{fx}^2}} = \frac{f'z}{\sqrt{1-\overline{fz}^2}} = \text{Const.}$$

folglich ist $\frac{d.fx}{\sqrt{1-\overline{fx}^2}} = C.dx$

d. i. (§. 34. n. 1. u. §. 39.) $d.Arc.\,\text{Sin.}\,fx = C.dx$,

mithin $Arc.\,\text{Sin}\,fx = C' + Cx$,

$$fx = \text{Sin.}\,(C' + Cx),$$
$$(1 - \overline{fx}^2)^{\frac{1}{2}} = \text{Cos.}\,(C' + Cx).$$

Nun kann aber wie in dem vorhergehenden Beyspiel gezeigt werden, daß $C' = 0$.

Also ist $fx = \text{Sin.}\,Cx$, wo C eine beliebige constante Größe ist. Demnach hat nur der Sinus eines Bogens, welcher mit der veränderlichen Größe x, wovon er abhängt, zugleich verschwindet, die erwähnte Eigenschaft.

Viertes Capitel.

Von den größten und kleinsten Werthen gegebener Functionen.

§. 50. Wenn eine Function einer veränderlichen Größe so beschaffen ist, daß sie mit dieser beständig über alle Gränzen wächst oder abnimmt; so kann kein größter oder kleinster Werth derselben angegeben werden. Wenn es aber eine gewiße Gränze giebt, welche sie bey ihrer Zu- oder Abnahme nicht überschreiten kann, und der Werth der veränderlichen Größe kann angegeben werden, welchem diese Gränze entspricht; so heißt dieser bestimmte Werth der Function ein größter oder ein kleinster (Maximum, Minimum). Eben diese Benennung giebt man auch denjenigen Werthen einer Function, welche größer oder kleiner sind, als die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Werthe, wenn gleich die Function für andere Werthe der veränderlichen Größe noch größer oder kleiner werden, und über alle Gränzen wachsen oder abnehmen kann. Eine Function kann also mehrere größte und kleinste Werthe haben, wenn sie, nachdem sie an die Gränze ihrer Zunahme gekommen ist, und wiederum anfängt abzunehmen, einen kleinsten Werth erreicht, sodenn wiederum bis zu einer gewißen Gränze wächst, hernach wieder abnimmt, u. s. w. und diese größte und kleinste Werthe können unter sich verschieden seyn. Der größte unter mehreren größten Werthen heißt ein Maximum Maxi-

morum, und der kleinste unter mehreren kleinsten Werthen ein Minimum Minimorum.

§. 51. Es sey nun fx irgend eine gegebene Function von x; so wird man nach §. 20. haben

$$f(x+\Delta x) = fx + \frac{\Delta x}{1}\frac{d.fx}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \&c.$$

und, wenn man Δx negativ sezt,

$$f(x-\Delta x) = fx - \frac{\Delta x}{1}\frac{d.fx}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} - \&c.$$

Wenn also fx ein Maximum oder Minimum seyn soll; so muß im ersten Fall so wohl $f(x+\Delta x)-fx$ als $f(x-\Delta x)-fx$,

$$\text{d. i. so wohl } \frac{\Delta x}{1}\frac{d.fx}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \&c.$$

$$\text{als } -\frac{\Delta x}{1}\frac{d.fx}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} - \&c.$$

negativ, und im zweyten Fall positiv seyn, wie klein man auch Δx nehmen mag. Es sey Δx so klein genommen, daß jedes Glied dieser Reihen die Summe aller folgenden übertreffe; so wird, wenn $\frac{d.fx}{dx}$ positiv ist, die erste Reihe positiv, die zweyte negativ, und im umgekehrten Fall die erste negativ, und die zweyte positiv seyn. Folglich muß, wenn ein Maximum oder Minimum statt finden soll, $\frac{d.fx}{dx} = 0$ seyn. Da vermöge der Voraussetzung fx eine gegebene Function von x ist; so ist $\frac{d.fx}{dx} = f'x$ ebenfalls eine gegebene Function von x, und man wird zur Bestimmung von x die Gleichung haben $f'x = 0$. Für diesen bestimmten Werth von x wird man also haben

$$f(x+\Delta x) = fx + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} + \&c.$$

$$f(x-\Delta x) = fx + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} - \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^2fx}{dx^3} + \text{etc.}$$

folglich muß, wenn für diesen Werth von x die Größe $\frac{d^2fx}{dx^2}$ nicht

$= 0$ wird, im Fall des Maximums $\frac{d^2fx}{dx^2}$ negativ, und im Fall des Minimums $\frac{d^2fx}{dx^2}$ positiv seyn.

Wird aber auch $\frac{d^2fx}{dx^2} = 0$; so ist

$$f(x+\Delta x) = fx + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{1.2.3.4}\frac{d^4fx}{dx^4} + \text{etc.}$$

$$f(x-\Delta x) = fx - \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{1.2.3.4}\frac{d^4fx}{dx^4} - \text{etc.}$$

und es ist weder ein Maximum noch Minimum möglich, wenn nicht zugleich $\frac{d^3fx}{dx^3} = 0$. Wird auch dieser Ausdruk $= 0$; so muß $\frac{d^4fx}{dx^4}$, wenn es nicht verschwindet, im Fall des Maximums negativ, und im Fall des Minimums positiv seyn.

Allgemein, wenn alle höhere Differentiale bis zur $r$ten Ordnung inclusive verschwinden, und r eine gerade Zahl ist; so wird man haben

$$f(x+\Delta x) = fx + \frac{\Delta x^{r+1}}{1.2\ldots(r+1)}\frac{d^{r+1}fx}{dx^{r+1}} + \frac{\Delta x^{r+2}}{1.2\ldots(r+2)}\frac{d^{r+2}fx}{dx^{r+2}} + \&c.$$

$$f(x-\Delta x) = fx - \frac{\Delta x^{r+1}}{1.2\ldots(r+1)}\frac{d^{r+1}fx}{dx^{r+1}} + \frac{\Delta x^{r+2}}{1.2\ldots(r+2)}\frac{d^{r+2}fx}{dx^{r+2}} - \&c.$$

Folglich wird weder ein Maximum noch Minimum möglich seyn, wenn nicht zugleich $\frac{d^{r+1}fx}{dx^{r+1}} = 0$ wird. Verschwindet aber dieser Coefficient, ohne daß der nächstfolgende verschwindet; so muß im Fall des Maximums $\frac{d^{r+2}fx}{dx^{r+2}}$ negativ, und im Fall des Minimums positiv seyn.

Wenn also fx oder y irgend eine gegebene Function von x ist; so wird man zuerst für das Maximum oder Minimum die Bedingung haben

$$\left.\begin{matrix}\frac{d.fx}{dx}\\ \text{oder } \frac{dy}{dx}\end{matrix}\right\} = 0.$$ Man wird die aus dieser Gleichung gefun-

dene Werthe von x in dem Ausdruk $\frac{d^2fx}{dx^2}$ substituiren, welcher, wenn er nicht verschwindet, im Fall des Maximums negativ, im Fall des Minimums positiv seyn muß. Wenn aber für diese bestimmte Werthe von x ein Differential von irgend einer geraden Ordnung verschwindet; so müßte das Differential von der nächstfolgenden ungeraden Ordnung ebenfalls verschwinden, und das darauf folgende der geraden Ordnung für das Maximum negativ, und für das Minimum positiv seyn. Endlich wird man die gefundenen Werthe von x in die gegebene Function setzen, und dadurch die größten und kleinsten Werthe der Function selbst erhalten, wenn sie möglich sind.

Bey dieser Untersuchung hat man den Werth von fx, welcher dem aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, oder $f'x = 0$ gefolgerten Werth von x entspricht, als positiv vorausgesezt. Würde fx negativ; so müßte man obige für die Kennzeichen des Maximums oder Minimums gegebene Regeln umkehren, um zu finden, ob fx in Vergleichung mit seinen zunächst vorhergehenden oder nachfolgenden Werthen ein Maximum oder Minimum werde. In so fern man aber negative Größen kleiner als positive, und eine kleinere negative Größe in Beziehung auf positive Größen größer als eine größere negative Größe betrachten kann, sind die gegebenen Regeln allgemein, fx mag positiv seyn oder negativ werden.

Diejenigen Fälle, in welchen die Differentiale unmöglich werden, mithin die bisherigen Schlüße nicht mehr ihre Anwendung finden, werden hernach besonders betrachtet werden.

Zur Erläuterung mögen folgende Beyspiele dienen.

Sey $\left.\begin{matrix} fx \\ y \end{matrix}\right\} = a + bx^2 - x^3$;

so ist $\frac{dy}{dx} = 2bx - 3x^2$,

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2b - 6x$.

Für das Maximum oder Minimum muß $2bx - 3x^2 = 0$; folglich entweder $x = 0$, oder $2b - 3x = 0$, $x = \frac{2}{3}b$ seyn.

Für $x = 0$ wird aber $\frac{d^2y}{dx^2} = 2b$,

und für $x = \frac{2}{3}b$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -2b$.

Folglich wird y ein Minimum für $x = 0$
und ein Maximum für $x = \frac{2}{3}b$.

Das Minimum selbst ist $= a$,

das Maximum $= a + \frac{4}{27}b^3$.

Sey $y = a + (b-x)x^3 = a + bx^3 - x^4$;

so ist $\frac{dy}{dx} = 3bx^2 - 4x^3$, $= 0$ für $\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{3}{4}b \end{matrix}\right\}$,

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6bx - 12x^2$, $= 0$ für $x = 0$,

$= -\frac{9}{4}b^2$ für $x = \frac{3}{4}b$.

$\frac{d^3y}{dx^3} = 6b - 24x$, $= 6b$ für $x = 0$.

Folglich wird y weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn $x = 0$, aber ein Maximum, wenn $x = \frac{3}{4}b$, und das Maximum selbst ist $= a + \frac{27}{256}b^4$.

Man soll unter allen geradstehenden Cylindern, deren Inhalt $= c^3$, denjenigen finden, dessen krumme Oberfläche am kleinsten ist.

Sezt man den Halbmesser der Grundfläche $= x$; so ist der Inhalt der Grundfläche $= \pi x^2$, und die Höhe des Cylinders $= \frac{c^3}{\pi x^2}$, mithin die krumme Oberfläche $= 2\pi x . \frac{c^3}{\pi x^2} = \frac{3}{x} = y$.

Daher ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{2c^3}{x^2}$, welcher Ausdruk niemals $= 0$ wird. Die Aufgabe ist also unmöglich.

Soll aber die krumme Oberfläche sammt der Grundfläche ein Minimum werden; so muß seyn $y = \frac{2c^3}{x} + \pi x^2 =$ Minim.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2c^3}{x^2} + 2\pi x = 0$,

$\pi x^3 = c^3$,

$x = c\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$

Da $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4c^3}{x^3} + 2\pi$,

$= 6m$ für $x = c\sqrt[3]{\frac{1}{m}}$;

so wird y für diesen Werth von x am kleinsten, und die Höhe des Cylinders findet sich = den Halbmesser der Grundfläche.

Eben so findet sich, daß, wenn die ganze Oberfläche des Cylinders am kleinsten werden soll, die Höhe des Cylinders dem Durchmesser der Grundfläche gleich werden müße.

§. 52. Wenn die vorgegebene Function ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner Functionen von x sind; so kann die Untersuchung über die grösten und kleinsten Werthe desselben auf folgende Art abgekürzt werden.

Sey $y = \frac{P}{Q}$; so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx}}{Q^2}$,

und für das Maximum oder Minim. $Q\frac{dP}{dx} = P\frac{dQ}{dx}$.

ferner ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q^2\left(Q\frac{d^2P}{dx^2} - P\frac{d^2Q}{dx^2}\right) - \left(Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx}\right)^2 Q\frac{dQ}{dx}}{Q^4}$

$= \frac{Q\frac{d^2P}{dx^2} - P\frac{d^2Q}{dx^2}}{Q^2}$ für $Q\frac{dP}{dx} = P\frac{dQ}{dx}$.

Folglich ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ für den aus der Gleichung $Q\frac{dP}{dx} = P\frac{dQ}{dx}$ gefundenen Werth von x negativ oder positiv, je nachdem $Q\frac{d^2P}{dx^2} - P\frac{d^2Q}{dx^2}$ für denselben Werth von x negativ oder positiv wird.

Wenn z. B. $y = \frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 10x + 9}$, mithin $P = x^2 - 10x + 9$, $Q = x^2 + 10x + 9$ ist; so ist

$\frac{dP}{dx} = 2x - 10$, $\frac{dQ}{dx} = 2x + 10$, und

$Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx} = 20x^2 - 180 = 20(x^2 - 9)$.

Für das Maximum oder Minimum muß also $x^2 = 9$, $x = \pm 3$ seyn.

Nun wird $Q\frac{d^2P}{dx^2} - P\frac{d^2Q}{dx^2} = \pm 120$, je nachdem man $x = \pm 3$ sezt; folglich wird y ein Minimum für $x = +3$ und ein Maximum für $x = -3$.

Aber für $x = +3$ wird $y = -\frac{1}{4}$,
—— $x = -3$ — $= -4$;

folglich ist $-\frac{1}{4}$ in Vergleichung mit den unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden negativen Werthen von y ein Maximum, und -4 in demselben Sinn genommen ein Minimum. Nach der allgemeinen Regel verhält es sich umgekehrt, in so fern $-\frac{1}{4}$ kleiner ist als eine kleinere negative Größe, und -4 größer als eine größere negative Größe. Wirklich findet

man für $x = +2$, $y = -\frac{1}{4\frac{5}{7}}$,

für $x = +4$, $y = -\frac{1}{4\frac{1}{3}}$,

und für $x = -2$, $y = -4\frac{5}{7}$,

für $x = -4$, $y = -4\frac{1}{3}$.

Wäre $y = 5 + \frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 10x + 9}$; so blieben die Bedingungsgleichungen für das Maximum und Minimum dieselben, wie vorhin, und es wird

für $x = 3$, $y = 4\frac{3}{4}$ = Min.

für $x = -3$, $y = 1$ = Max.

Wirklich sind für $x = 2$ und $= 4$ die Werthe von y beziehungsweise $4\frac{26}{33}$ und $4\frac{10}{13}$, welche größer sind als $4\frac{3}{4}$. Für $x = -2$ und -4 hingegen erhält man $y = \frac{2}{7}$ und $\frac{2}{3}$, welche Werthe kleiner sind als 1.

Wäre $y^2 = \frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 10x + 9}$, und sollte y ein Maximum oder Minimum werden; so wäre die Aufgabe unmöglich, weil für die aus der Bedingungsgleichung gefundenen Werthe von x das Quadrat von y negativ wird. Hingegen sind die kleinsten und grösten Werthe von y möglich, wenn $y^2 = 5 + \frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 10x + 9}$ ist, und sie werden $\pm \sqrt{4\frac{3}{4}}$, und ± 1.

§. 53. Wenn die Function y von x nur durch eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist; so nimmt man um die grösten und kleinsten Werthe von y zu finden, nach §. 42. die Differentialgleichung der ersten Ordnung, und sezt in dieser $\frac{dy}{dx} = 0$. Diese neue Gleichung zwischen x und y mit der gegebenen Gleichung verbunden dient zur Bestimmung der Werthe von x und y, welche dem Maximum oder Minimum entsprechen. Nimmt man hierauf die Differentialgleichung der zweyten Ordnung, und sezt in dieser $\frac{dy}{dx} = 0$; so wird man den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch y und x ausgedrükt erhalten, in welchem man die für y und x gefundenen Wer-

the substituiren kann, um beurtheilen zu können, ob ein Maximum oder Minimum statt findet. Würde für diese Werthe von x und y das $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; so müßte man die Differentialgleichung der dritten Ordnung nehmen, in dieser so wohl $\frac{dy}{dx}$ als $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, und statt x, y ihre vorhin gefundenen Werthe setzen, um den diesen Werthen von x und y entsprechenden Werth von $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu finden. Dieser muß, wenn ein Maximum oder Minimum möglich seyn soll, $= 0$ seyn (§. 51.), und man wird auf ähnliche Art den Werth von $\frac{d^4y}{dx^4}$ bestimmen, welcher für das Maximum negativ, und für das Minimum positiv seyn muß, u. s. w.

Sey z. B. $y^3 - axy + x^3 = 0$ die vorgegebene Gleichung, und es werde der Werth von x gesucht, welchem die grösten und kleinsten Werthe von y entsprechen; so ist nach (§. 42.) die erste Differentialgleichung

$$(3y^2 - ax)\frac{dy}{dx} - ay + 3x^2 = 0.$$

Man setze $\frac{dy}{dx} = 0$; so erhält man $-ay + 3x^2 = 0$, und $y = \frac{3x^2}{a}$.

Dieser Werth von y in die vorgegebene Gleichung gesezt giebt

$$\frac{27x^6}{a^3} - 3x^3 + x^3 = 0,$$

oder $\frac{x^3}{a^3}(27x^3 - 2a^3) = 0.$

Folglich muß seyn $x = 0$, und zugleich $y = 0$,

oder $27x^3 - 2a^3 = 0$, $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$,

$$y = \frac{3x^2}{a} = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

Man nehme die zweyte Differentialgleichung; so erhält man

$$(3y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a\frac{dy}{dx} - a\frac{dy}{dx} + 6x = 0.$$

Für $\frac{dy}{dx} = 0$ reducirt sich diese Gleichung auf

$(3y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 6x = 0$, und es wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6x}{3y^2 - ax}$$

$= -\frac{6a^2}{27x^3 - a^3}$, weil $y = \frac{3x^2}{a}$,

$= +\frac{6}{a}$ für $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = 0$,

$= -\frac{6}{a}$ für $x = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{2}$,

$y = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{4}$.

Folglich ist $y = 0$ ein Minimum, und $y = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{4}$ ein Maximum.

Wäre $(y-b)^3 - ax(y-b) + x^3 = 0$ die vorgegebene Gleichung; so wäre $y = b$ ein Minimum, und $y = b + \frac{1}{3} a \sqrt[3]{4}$ ein Maximum.

§. 54. Wenn zwischen den drey veränderlichen Grösen x, y und z zwey Gleichungen gegeben sind; so könnte man, um diejenigen Werthe von x zu finden, welchen die gröften und kleinsten Werthe von z entsprechen, die Größe y elimininiren, und dadurch die Auflösung der Aufgabe auf die des vorhergehenden §. zurükführen. Aber man kann, ohne diese Elimination wirklich zu machen, welche ohnehin in manchen Fällen Schwierigkeiten haben würde, die Aufgabe auf folgende Art auflösen. Man differentiire die zwey Gleichungen, indem man z und y als Functionen von x betrachtet, und sezze den Bedingungen des Maximums und Minimums zufolge $\frac{dz}{dx} = 0$; so erhält man zwey Gleichungen, welche auser den veränderlichen Größen x, y, z nur noch $\frac{dy}{dx}$ enthalten. Man kann also $\frac{dy}{dx}$ elimininiren, so daß man eine neue Gleichung zwischen den veränderlichen Größen erhält, welche mit den zwey gegebenen Gleichungen verbunden zu der Bestimmung der Werthe von x, y und z dienen wird, welchen die gröften und kleinsten Werthe von z entsprechen. Sodenn wird man auf ähnliche Art, wie in dem vorhergehenden §. die Werthe von $\frac{d^2z}{dx^2}$ bestimmen, um über das Maximum oder Minimum urtheilen zu können.

Man soll z. B. unter allen Vierecken, deren Seiten gegeben sind, dasjenige bestimmen, dessen Inhalt am gröften ist. Sezt man zwey Gegenwinkel des Vierecks $= x$ und y, und die diese Winkel einschließende Seiten

beziehungsweise $= a, b$, und $= f, g$; so hat man, wenn der doppelte Inhalt des Vierecks $= 2z$ gesezt wird,

1.) $2z = ab \operatorname{Sin.} x + fg \operatorname{Sin.} y.$

Man denke sich die den Winkeln x, y gegenüberliegende Diagonale des Vierecks gezogen; so ist ihr Quadrat

so wohl $= a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos.} x,$

als $= f^2 + g^2 - 2fg \operatorname{Cos.} y,$

und man hat

2.) $a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos.} x = f^2 + g^2 - 2fg \operatorname{Cos.} y.$

Differentiirt man die Gleichungen n. 1. und 2; so erhält man

3.) $\frac{2dz}{dx} = ab \operatorname{Cos.} x + fg \frac{dy}{dx} \operatorname{Cos.} y,$

und 4.) $2ab \operatorname{Sin.} x = 2fg \frac{dy}{dx} \operatorname{Sin.} y.$

Vermöge der Bedingungen des Maximums und Minimums muß aber $\frac{dz}{dx} = 0$ seyn; folglich wird man haben

$$ab \operatorname{Cos.} x + fg \frac{dy}{dx} \operatorname{Cos.} y = 0,$$

und $$ab \operatorname{Sin.} x - fg \frac{dy}{dx} \operatorname{Sin.} y = 0.$$

Um $\frac{dy}{dx}$ zu eliminiren, multiplicire man die erste dieser Gleichungen mit $\operatorname{Sin.} y$, die zweyte mit $\operatorname{Cos.} y$, und addire sie; so erhält man

$$ab \operatorname{Sin.} x \operatorname{Cos.} y + ab \operatorname{Cos.} x \operatorname{Sin.} y = 0,$$

d. i. $$ab \operatorname{Sin.} (x+y) = 0.$$

Nun muß $x+y$ kleiner seyn als die Summe der Winkel des Vierecks, $< 4R$; folglich muß entweder $x+y = 0$, oder $x+y = 2R$ seyn.

Um beurtheilen zu können, ob ein Maximum oder Minimum statt finde differentiire man die Gleichungen n. 3. und 4. noch einmal; so findet man

$$\frac{2d^2z}{dx^2} = -ab \operatorname{Sin.} x + fg \operatorname{Cos.} y \frac{d^2y}{dx^2} - fg \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \operatorname{Sin.} y,$$

und $$0 = ab \operatorname{Cos.} x - fg \operatorname{Sin.} y \frac{d^2y}{dx^2} - fg \left(\frac{dy}{dx}\right) \operatorname{Cos.} y.$$

Um $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu eliminiren, multiplicire man die erste dieser Gleichungen mit $\operatorname{Sin.} y$, die zweyte mit $\operatorname{Cos.} y$, und addire sie; so wird man haben

$$\frac{2d^2z}{dx^2} \operatorname{Sin.} y = ab (\operatorname{Cos.} x \operatorname{Cos.} y - \operatorname{Sin.} x \operatorname{Sin.} y) - fg \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$= ab \operatorname{Cos.} (x+y) - \frac{a^2b^2 \operatorname{Sin.} x^2}{fg \operatorname{Sin.} y^2} \text{ (n. 4.).}$$

Für $x+y = 2R$ ist aber $\text{Cos.}(x+y) = -1$, und $\text{Sin.}\, y = \text{Sin.}\, x$; folglich $\frac{2d^2z}{dx^2} = -\frac{ab}{\text{Sin.}\, x} - \frac{a^2b^2}{fg\,\text{Sin.}\, x}$, nothwendig eine negative Größe, weil $x < 2R$. Der Inhalt des Vierecks wird also am größten, wenn seine Gegenwinkel zusammen zwey rechte Winkel ausmachen, mithin ein Kreis um dasselbige kann beschrieben werden.

Für $x+y = 0$ wird $\text{Cos.}(x+y) = 1$, $\text{Sin.}\, y = -\text{Sin.}\, x$, und daher

$$\frac{2d^2z}{dx^2} = -\frac{ab}{\text{Sin.}\, x} + \frac{a^2b^2}{fg\,\text{Sin.}\, x},$$

$$= \frac{ab}{fg\,\text{Sin.}\, x}(ab - fg),$$ positiv oder negativ, je nachdem ab größer oder kleiner als fg ist. Da nun hier y und x verschiedene Zeichen haben müßen; so liegen die Spitzen der Winkel y und x nicht, wie die Gleichung n. 1. vorausseze, auf verschiedenen Seiten der die zwey übrigen Winkelpunkte verbindenden geraden Linie, sondern auf einerley Seite derselben, und man hat eigentlich die Auflösung dieser Aufgabe: Man soll die gemeinschaftliche Grundlinie zweyer Dreyecke, deren übrige Seiten beziehungsweise a, b und f, g sind; so bestimmen, daß ihr Unterschied am größten oder am kleinsten werde. Obige Auflösung zeigt, daß die zwey Dreyecke in einerley Kreisabschnitt liegen müßen, dessen Basis die gesuchte Grundlinie derselben ist. Ist $ab > fg$; so ist der Ueberschuß des Inhalts des ersten Dreyeks über den des zweyten $= \frac{ab - fg}{2}\,\text{Sin.}\, x$, und zugleich $\frac{d^2z}{dx^2}$ positiv, mithin dieser Ueberschuß ein Minimum. Ist aber $ab < fg$, so wird der Ueberschuß des Inhalts des ersten Dreyeks über den des zweyten, und zugleich $\frac{d^2z}{dx^4}$ negativ, mithin dieser Ueberschuß ein Maximum, oder eigentlich der Ueberschuß des Inhalts des zweyten Dreyeks über den des ersten ein Minimum.

§. 55. Die bisher gezeigte Methode, die größten und kleinsten Werthe einer Function einer veränderlichen Größe zu finden, lassen sich auch anwenden auf Functionen mehrerer von einander unabhängigen veränderlichen Größen, oder auf diejenigen Fälle, in welchen die Anzahl der veränderlichen Größen die Anzahl der zwischen denselben gegebenen Gleichungen um mehr als um zwey Einheiten übertrifft. Ist nemlich $z = f(x, y)$ eine Function der zwey von einander unabhängigen veränderlichen Größen x und y; so kann man eine derselben, z. B. x, als constant betrachten, und die Werthe von y suchen, welchen ein größter oder kleinster Werth von z entspricht. Nach §. 51. wird also das partielle Differential (§. 44.) $\frac{dz}{dy} = 0$, und $\frac{d^2z}{dy^2}$ für das Maximum negativ, und

für das Minimum positiv seyn müßen. Verbindet man nun die Gleichung $\frac{dz}{dy} = 0$ mit der gegebenen $z = f(x, y)$; so kann man y eliminiren, nnd z wird ein Maximum oder Minimum in Beziehung auf y, und zugleich eine Function von x allein. Man kann also ferner nach §. 51. diejenigen Werthe von x finden, für welche diese gegebene Function von x ein Maximum oder Minimum wird, wodurch die grösten und kleinsten Werthe von z selbst bestimmt werden. Sey z. B. die gegebene Zahl a in drey Theile so zu theilen, daß das Product dieser Theile am grösten werde. Heißen zwey dieser Theile x und y; so ist der dritte Theil $= a - x - y$, und das Product $z = xy(a - x - y)$. Betrachtet man x als gegeben; so ist

$$\frac{dz}{dy} = x(a - x - y) - xy = ax - x^2 - 2xy.$$

Folglich muß seyn $ax - x^2 - 2xy = 0$, $y = \frac{a-x}{2}$.

Ferner ist $\frac{d^2z}{dy^2} = -2x$, und daher z am grösten in Beziehung auf y, wenn $y = \frac{a-x}{2}$.

Sezt man diesen Werth von y in die vorgegebene Gleichung; so wird

$$z = \tfrac{1}{4} x(a - x)^2.$$

Man betrachte jezt x als veränderlich; so muß für das Maximum seyn

$$\frac{dz}{dx} = \tfrac{1}{4}(a - x^2 - \tfrac{1}{2} x(a - x) = 0,$$

$$\frac{a-x}{4}(a - 3x) = 0,\ x - a \text{ oder } x = \tfrac{1}{3} a,$$

und $\frac{d^2z}{dx^2} = -a + \frac{3}{2} x$ eine negative Grösse, mithin $x = \frac{1}{3} a$.

Da nun $y = \frac{a-x}{2}$; so muß auch $y = \frac{1}{3} a$ seyn. Folglich wird das Product z am grösten, wenn a in drey gleiche Theile getheilt wird.

Auf die Auflösung dieser Aufgabe läßt sich folgende zurükführen: Unter allen Dreyecken, deren Umfang gegeben ist, dasjenige finden, dessen Inhalt am grösten ist. Sezt man nemlich den Umfang $= S$, und die drey Seiten =

x, y, z; so ist der Inhalt gleich der Quadratwurzel aus $\frac{1}{2}S(\frac{1}{2}S-x)(\frac{1}{2}S-y)(\frac{1}{2}S-z)$. Folglich muß das Product $(\frac{1}{2}S-x)(\frac{1}{2}S-y)(\frac{1}{2}S-z)$ am grösten werden. Die Summe dieser drey Factoren ist $\frac{3}{2}S-(x+y+z) = \frac{1}{2}S$; mithin gegeben. Vermöge der so eben aufgelösten Aufgabe wird aber jenes Product am grösten, wenn $\frac{1}{2}S-x$, $\frac{1}{2}S-y$, $\frac{1}{2}S-z$ einander gleich sind; folglich müßen x, y und z einander gleich seyn. Unter allen Dreyecken, die einerley Umfang haben, hat also das gleichseitige den grösten Inhalt.

§. 56. Man kann aber auch unmittelbar die Bedingungen des Maximums und Minimums finden, ohne vorher mittelst der partiellen Differentialgleichungen einige der veränderlichen Grösßen zu eliminiren. Sey $z = f(x, y)$ irgend eine gegebene Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grösßen x und y; so wird seyn müßen $\frac{dz}{dy} = 0$, und $\frac{d^2z}{dy^2}$ negativ fürs Maximum, und positiv fürs Minimum in Beziehung auf y. Da nun $\frac{dz}{dy} = 0$ seyn muß; so ist zwischen x und y eine Gleichung gegeben, vermöge welcher z eine Function von x allein wird. Folglich ist jezt (§. 41.)

$$\frac{d.f(x, y)}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dy},$$ welches $= 0$ seyn muß (§. 51.).

Aber für das Maximum oder Minimum in Beziehung auf y hat man schon $\frac{dz}{dy} = 0$; folglich muß auch $\frac{dz}{dx} = 0$ seyn.

Sey $z = f(x, y, t)$ eine Function von x, y und t; so muß vermöge des vorhergehenden für das Maximum oder Minimum in Beziehung auf y und t so wohl $\frac{dz}{dy}$ als $\frac{dz}{dt} = 0$ seyn, vermöge welcher Gleichungen z eine Function von x allein wird. Man hat also jezt (§. 41.)

$$\frac{d.f(x, y, t)}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{dt}{dx}\frac{dz}{dt},$$ welches $= 0$ seyn muß.

Aber $\frac{dz}{dy} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$ vermöge der vorhergehenden Bedingung; folglich muß auch $\frac{dz}{dx} = 0$ seyn. Diese Schlüße lassen sich

weiter fortsetzen, und es ergiebt sich daraus, daß, wenn eine Function mehrerer veränderlichen Größen ein Maximum oder Minimum werden soll, die partiellen Differentiale in Beziehung auf jede der veränderlichen Größen jedes für sich $= 0$ seyn müßen. Man wird also ebenso viele Gleichungen erhalten als die Function veränderliche Größen enthält, wodurch diese Größen und die Function selbst bestimmt werden.

Die Kennzeichen des Maximums und Minimums ergeben sich auf folgende Art.

Man hat 1.) $\frac{dz}{dy} = 0$,

2.) $\frac{dz}{dx} = 0$,

3.) $\frac{d^2z}{dy^2}$ negativ für das Maximum, und positiv für das Minimum in Beziehung auf y.

Ferner ist wegen der Bedingung n. 1., wodurch y eine Function von x, mithin z ebenfalls eine Function von x allein wird,

$$\frac{d.f(x.y)}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dy} \text{ (§. 41.)},$$

$$\frac{d^2f(x,y)}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dydx} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dxdy},$$

$$+ \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$= \frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dy^2} \text{ vermöge §. 44.,}$$

und weil $\frac{dz}{dy} = 0$.

Da aber $\frac{dz}{dy} = 0$; so ist nach §. 42.

$$\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dy^2} = 0, \text{ und daher, wenn man}$$

mit $\frac{dy}{dx}$ multiplicirt,

4.) $\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$

Folg-

Folglich ist $\frac{d^2 f(x,y)}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2 z}{dxdy}$,

$$= \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{\left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right)^2}{\frac{d^2 z}{dy^2}} \text{ (n. 4.)},$$

$$= \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^2 z}{dy^2} - \left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right)^2}{\frac{d^2 z}{dy^2}}, \text{ welche Grös-}$$

se, wenn sie nicht verschwindet, für das Maximum negativ, und für das Minimum positiv seyn muß. Im ersten Fall ist aber $\frac{d^2 z}{dy^2}$ negativ (n. 3.); folglich muß der Zähler des obigen Bruchs positiv, mithin $\frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^2 z}{dy^2} > \left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right)^2$ seyn. Also muß auch $\frac{d^2 z}{dx^2}$ negativ seyn, weil sonst das erste Glied im Zähler negativ würde.

Für das Maximum muß der Werth des obigen Bruchs positiv, uud, da in diesem Fall $\frac{d^2 z}{dy^2}$ positiv seyn muß (n. 3.) auch $\frac{d^2 z}{dx^2}$ positiv; und wiederum der Zähler des Bruchs positiv, mithin $\frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^2 z}{dy^2} > \left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right)^2$ seyn.

Demnach muß

für das Maximum so wohl $\frac{d^2 z}{dy^2}$ als $\frac{d^2 z}{dx^2}$ negativ

für das Minimum — — — — positiv,

und in beyden Fällen $\frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^2 z}{dy^2} > \left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right)^2$ seyn.

Dieselben Bedingungen für die Maxima und Minima findet man mittelst des auf eine Function mehrerer veränderlichen Größen ausgedehnten Taylorischen Satzes (§. 45.). Es ist

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$

$$\frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2 z}{dx^2} + \text{&c.}$$

$$+\frac{\Delta x}{1}\frac{dz}{dy}+\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{1}\frac{d^2z}{dxdy}+\text{&c.}$$

$$+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\text{&c.}$$

Es seyen Δx und Δy so klein genommen, daß $\Delta x\frac{dz}{dx}+\Delta y\frac{dz}{dy}$ größer sey als die Summe aller folgenden Glieder. Da diejenigen Glieder, welche die ersten Potenzen von Δx und Δy enthalten, mit den Größen Δx und Δy ihre Zeichen änderen; so wird weder ein Maximum, noch ein Minimum statt finden, wenn nicht $\frac{dz}{dx}=0$, und $\frac{dz}{dy}=0$. Verschwinden aber diese partiellen Differentiale; so wird

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{1}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\text{&c.}$$

Wenn nun wiederum Δx und Δy so klein genommen sind, daß die Summe derjenigen Glieder, welche die Quadrate und Producte dieser Größen enthalten, die Summe aller folgenden Glieder übertrifft; so wird die Größe $\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{1}\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}$ für das Maximum negativ, und für das Minimum positiv seyn müßen. Man bezeichne diese Größe zur Abkürzung durch $\frac{1}{2}(A\overline{\Delta x}^2+2B\Delta x\Delta y+C\overline{\Delta y}^2)$, und verwandle sie in folgende:

$$\frac{1}{2}A(\overline{\Delta x}^2+2\frac{B}{A}\Delta x\Delta y+\frac{C}{A}\overline{\Delta y}^2)$$

$$=\frac{1}{2}A(\overline{\Delta x}^2+2\frac{B}{A}\Delta x\Delta y+\frac{B^2}{A^2}\overline{\Delta y}^2-\frac{B^2}{A^2}\overline{\Delta y}^2+\frac{C}{A}\overline{\Delta y}^2),$$

$$=\frac{1}{2}A(\Delta x+\frac{B}{A}\Delta y)^2+\frac{\overline{\Delta y}^2}{2}(C-\frac{B^2}{A}),$$

$$=\frac{1}{2}A(\Delta x+\frac{B}{A}\Delta y)^2+\frac{\overline{\Delta y}^2}{2}(\frac{AC-B^2}{A}).$$

Soll dieser Ausdruk negativ seyn; so muß A negativ, und $AC>B^2$ seyn, weil sonst $\frac{AC-B^2}{A}$ positiv, mithin der ganze Ausdruk positiv würde, wenn man $\Delta x+\frac{B}{A}\Delta y=0$,

d. i. $\Delta x = -\frac{A}{B}\Delta y$ machte. Auch muß, damit AC positiv wird, C ebenfalls negativ seyn. Soll aber eben dieser Ausdruk positiv seyn: so muß A, mithin auch $AC - B^2$ positiv, und daher C positiv, und $AC > B^2$ seyn. Demnach müssen A und C, d. i. $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ negativ für das Maximum, und positiv für das Minimum, und überdiß muß in beyden Fällen $AC > B^2$, d. i. $\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} > \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$ seyn, wie man oben gefunden hat.

§. 57. Um die Anwendung dieser Methode durch einige Beyspiele zu erläutern, sey unter allen Vierecken, von welchen drey an einander liegende Seiten a, b und c gegeben sind, dasjenige zu finden, dessen Inhalt am grösten ist.

Sezt man die äusseren Winkel des Viereks der Ordnung nach $= x$ und y; so ist der doppelte Inhalt desselben

$$2z = ab\,\text{Sin.}\,x + ac\,\text{Sin.}\,(x+y) + bc\,\text{Sin.}\,y \text{ (Trigon. §. 201.)},$$

folglich sind die Bedingungsgleichungen für das Maximum oder Minimum

$$\frac{2dz}{dx} = ab\,\text{Cos.}\,x + ac\,\text{Cos.}\,(x+y) = 0,$$

$$\frac{2dz}{dy} = ac\,\text{Cos.}\,(x+y) + bc\,\text{Cos.}\,y = 0,$$

und daher $b\,\text{Cos.}\,x = -c\,\text{Cos.}\,(x+y) = c\,\text{Cos.}\,(2R-(x+y))$,

$$b\,\text{Cos.}\,y = -a\,\text{Cos.}\,(x+y) = a\,\text{Cos.}\,(2R-(x+y)).$$

Man hat also zur Bestimmung von x und y zwey Gleichungen, mittelst welcher das Vierek bestimmt wird. Uebersezt man diese Ausdrücke in die Figur; so findet man, daß die Diagonalen des Viereks mit den der unbekannten Seite anliegenden Seiten beziehungsweise rechte Winkel machen müßen, mithin um das Vierek ein Kreis sich muß beschreiben lassen, dessen Durchmesser die vierte gesuchte Seite ist. Wenn unter den drey gegebenen Seiten zwey, oder alle drey, einander gleich sind; so kann das Vierek mittelst des Kreises und der geraden Linie construirt werden. Die allgemeine Auflösung der Aufgabe erfordert die Auflösung der cubischen Gleichungen.

Daß aber wirklich ein Maximum statt finde, ergiebt sich so.

Es ist $\frac{2d^2.z}{dx^2} = -ab\,\text{Sin.}\,x - ac\,\text{Sin.}\,(x+y)$,

$$\frac{2d^2z}{dy^2} = -ac\,\text{Sin.}\,(x+y) - bc\,\text{Sin.}\,y,$$

und beyde Ausdrücke sind negativ, wenn so wohl x als $x+y < 2R$.

Ferner ist $\frac{2d^2.z}{dxdy} = -ac\,\text{Sin.}\,(x+y)$

$$< \frac{2d^2z}{dx^2} \lessgtr \frac{2d^2z}{dy^2};$$

folglich ist $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 < \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2}$ und es findet wirklich ein Maximum statt, wenn sich um das Vierek ein Kreis beschreiben läßt, dessen Durchmesser die vierte gesuchte Seite ist.

§. 58. Es sind drey Punkte der Lage nach gegeben. Man soll in ihrer Ebene einen Punkt so bestimmen, daß die Summe seiner Entfernungen von den drey gegebenen Punkten ein Minimum werde.

Man ziehe in der Ebene der drey Punkte eine gerade Linie nach Belieben, z. B. so, daß die drey gegebenen Punkte auf einerley Seite dieser geraden Linie liegen, und fälle auf sie aus den drey Punkten die Perpendickel b, b', b''. Auf der gezogenen geraden Linie nehme man einen Punkt als Anfangspunkt der Abscissen nach Belieben, z. B. ausserhalb der Fußpunkte der Perpendickel, und seze die zwischen den lezteren Punkten und dem angenommenen Punkt liegende Segmente beziehungsweise $= a, a', a''$. Endlich sey aus dem gesuchten Punkt ebenfalls ein Perpendickel y auf die angenommene gerade Linie gefällt, und das zwischen dem Fußpunkt dieses Perpendickels und dem Anfangspunkt der Abscissen liegende Segment heiße x. Sezt man die Entfernungen des gesuchten Punkts von den drey gegebenen Punkten $= s, s', s''$; so wird s die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyeks seyn, dessen übrige Seiten $x-a, y-b$ sind ($x > a$, $y > b$ angenommen); so daß man haben wird

1.) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = s^2$.

Ebenso 2.) $(x-a')^2 + (y-b')^2 = s'^2$

3.) $(x-a'')^2 + (y-b'')^2 = s''^2$.

Die Summe der Entfernungen, welche ein Minimum werden soll, heiße z; so hat man

4) $z = s + s' + s''$.

Man hat also vier Gleichungen zwischen den sechs unbekannten oder veränderlichen Größen x, y, z, s, s', s'', und man könnte vier dieser Größen eliminiren, so daß z eine Function zweyer derselben, z. B. der Größen x und y würde. Ohne diese Elimination zu machen erhält man aber auf ähnliche Art, wie in dem 54 §. die Bedingungen des Minimums. Es ist, wenn die Gleichung n. 4. differentiirt wird,

$$\left.\begin{aligned} 5.)\ \frac{dz}{dx} &= \frac{ds}{dx} + \frac{ds'}{dx} + \frac{ds''}{dx} = 0 \\ 6.)\ \frac{dz}{dy} &= \frac{ds}{dy} + \frac{ds'}{dy} + \frac{ds''}{dy} = 0 \end{aligned}\right\} \text{für das Minim.}$$

Aus n. 1. erhält man aber durch das Differentiiren in Beziehung auf x

$$2(x-a) = \frac{2s\,ds}{dx}; \quad \frac{ds}{dx} = \frac{x-a}{s}.$$

Ebenso aus n. 2. $\frac{ds'}{dx} = \frac{x-a'}{s'}$,

und aus n. 3. $\frac{ds''}{dx} = \frac{x-a''}{s''}$.

Sodenn findet man, wenn man eben diese Gleichungen in Beziehung auf y differentiirt,

$$\frac{ds}{dy} = \frac{y-b}{s},$$

$$\frac{ds'}{dy} = \frac{y-b'}{s'},$$

$$\frac{ds''}{dy} = \frac{y-b''}{s''}.$$

Folglich muß, wenn man diese Ausdrücke in den Gleichungen n. 5. u. 6. subſtituirt,

$$\frac{x-a}{s} + \frac{x-a'}{s'} + \frac{x-a''}{s''} = 0,$$

und $\frac{y-b}{s} + \frac{y-b'}{s'} + \frac{y-b''}{s''} = 0$ ſeyn.

Nun ſind aber die drey Glieder der erſten dieſer Gleichungen die Sinus der Winkel, welche die von dem geſuchten Punkt an die drey gegebenen Punkte gezogenen geraden Linien mit dem Perpendikel y machen, und die drey Glieder der zweyten Gleichung ſind die Coſinus eben dieſer Winkel; folglich iſt, wenn man dieſe Winkel mit w, w', w'' bezeichnet,

7.) $\text{Sin.}\, w + \text{Sin.}\, w' + \text{Sin.}\, w'' = 0,$

8.) $\text{Cos.}\, w + \text{Cos.}\, w' + \text{Cos.}\, w'' = 0.$

Aus n. 7. folgt $\text{Sin.}\, w + \text{Sin.}\, w' = -\text{Sin.}\, w''$,

$$\overline{\text{Sin.}\, w}^2 + 2\,\text{Sin.}\, w\,\text{Sin.}\, w' + \overline{\text{Sin.}\, w'}^2 = \overline{\text{Sin.}\, w''}^2,$$

und aus n. 8. $\overline{\text{Cos.}\, w}^2 + 2\,\text{Cos.}\, w\,\text{Cos.}\, w' + \overline{\text{Cos.}\, w'}^2 = \overline{\text{Cos.}\, w''}^2$;

folglich iſt $1 + 2\,\text{Cos.}\,(w-w') + 1 = 1,$

$$\text{Cos.}\,(w-w') = -\tfrac{1}{2},$$

$$w - w' = 120^0.$$

Eben ſo findet ſich aus n. 7. u. 8., wenn man $\text{Sin.}\, w'$ und $\text{Cos.}\, w'$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt,

$$\text{Cos.}\,(w-w'') = -\tfrac{1}{2},$$

$$w - w'' = 120^0,$$

und ebenſo $w' - w'' = 120^0.$

Der geſuchte Punkt muß alſo ſo liegen, daß die aus demſelben an die drey gegebenen Punkte gezogenen geraden Linien gleiche Winkel mit einander machen, und es darf, wenn die Aufgabe möglich ſeyn ſoll, keiner der drey Winkel des Dreyeks, an deſſen Spitzen die drey gegebenen Punkte liegen, größer als 120^0 ſeyn.

Daß aber wirklich unter dieſer Vorausſetzung ein Minimum ſtatt finde, kann ſo gezeigt werden.

Man differentiir die Gleichung n. 5. in Beziehung auf x; so erhält man

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{s-(x-a)\frac{ds}{dx}}{s^2} + \frac{s'-(x-a')\frac{ds'}{dx}}{s'^2} + \frac{s''-(x-a'')\frac{ds''}{dx}}{s''^2},$$

$$= \frac{s-\frac{(x-a)^2}{s}}{s^2} + \frac{s'-\frac{(x-a')^2}{s'}}{s'^2} + \frac{s''-\frac{(x-a'')^2}{s''}}{s''^2},$$

$$= \frac{1}{s}\left(1-\left(\frac{x-a}{s}\right)^2\right) + \frac{1}{s'}\left(\frac{x-a'}{s'}\right)^2\right) + \frac{1}{s''}\left(1-\left(\frac{x-a''}{s''}\right)^2\right),$$

$$= \frac{1}{s}\,\overline{\text{Cos.}\,w}^2 + \frac{1}{s'}\,\overline{\text{Cos.}\,w'}^2 + \frac{1}{s''}\,\overline{\text{Cos.}\,w''}^2,$$

weil $\frac{x-a}{s} = \text{Sin.}\,w$, $1-\left(\frac{x-a}{s}\right)^2 = \overline{\text{Cos.}\,w}^2$.

Eben so erhält man aus n. 6., wenn man in Beziehung auf y differentiirt,

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{s-(y-b)\frac{ds}{ds}}{s^2} + \frac{s'-(y-b')\frac{ds'}{dy}}{s'^2} + \frac{s''-(y-b'')\frac{ds''}{dy}}{s''^2},$$

$$= \frac{1}{s}\left(1-\left(\frac{y-b}{s}\right)^2\right) + \frac{1}{s'}\left(1-\left(\frac{y-b'}{s'}\right)^2\right) + \frac{1}{s''}\left(1-\left(\frac{y-b''}{s''}\right)^2\right),$$

$$= \frac{1}{s}\,\overline{\text{Sin.}\,w}^2 + \frac{1}{s'}\,\overline{\text{Sin.}\,w'}^2 + \frac{1}{s''}\,\overline{\text{Sin.}\,w''}^2,$$

weil $\frac{y-b}{s} = \text{Cos.}\,w$, $1-\left(\frac{y-b}{s}\right)^2 = \overline{\text{Sin.}\,w}^2$.

Ferner ist, wenn man die Gleichung n. 6. in Beziehung auf x, oder die Gleichung n. 5. in Beziehung auf y differentiirt,

$$\frac{d^2z}{dxdy} = -\frac{(y-b)\frac{ds}{dx}}{s^2} - \frac{(y-b')\frac{ds'}{dx}}{s'^2} - \frac{(y-b'')\frac{ds''}{dx}}{s''^2},$$

$$= -\frac{y-b}{s^2}\,\frac{x-a}{s} - \frac{y-b'}{s'^2}\cdot\frac{x-a'}{s'} - \frac{y-b''}{s''^2}\cdot\frac{x-a''}{s''},$$

$$= -\frac{1}{s}\,\text{Cos.}\,w\,\text{Sin.}\,w - \frac{1}{s'}\,\text{Cos.}\,w'\,\text{Sin.}\,w' - \frac{1}{s''}\,\text{Cos.}\,w''\,\text{Sin.}\,w'',$$

und daher

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = \frac{1}{s^2}\overline{\text{Sin.}\,w}^2\,\overline{\text{Cos.}\,w}^2 + \frac{1}{s'^2}\overline{\text{Sin.}\,w'}^2\,\overline{\text{Cos.}\,w'}^2 + \frac{1}{s''^2}\overline{\text{Sin.}\,w''}^2\,\overline{\text{Cos.}\,w''}^2$$

$$+ \frac{2}{ss'}\,\text{Sin.}\,w\,\text{Cos.}\,w\,\text{Sin.}\,w'\,\text{Cos.}\,w' + \frac{2}{ss''}\,\text{Sin.}\,w\,\text{Cos.}\,w\,\text{Sin.}\,w''\,\text{Cos.}\,w''$$

$$+ \frac{2}{s's''}\,\text{Sin.}\,w'\,\text{Cos.}\,w'\,\text{Sin.}\,w''\,\text{Cos.}\,w''.$$

Endlich ist

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{1}{s^2}\overline{\text{Sin.}w}^2\overline{\text{Cos.}w}^2+\frac{1}{s'^2}\overline{\text{Sin.}w'}^2\overline{\text{Cos.}w'}^2+\frac{1}{s''^2}\overline{\text{Sin.}w''}^2\overline{\text{Cos.}w''}^2$$

$$+\frac{1}{ss'}\overline{\text{Sin.}w}^2\overline{\text{Cos.}w'}^2+\frac{1}{ss''}\overline{\text{Sin.}w}^2\overline{\text{Cos.}w''}^2+\frac{1}{s's''}\overline{\text{Sin.}w'}^2\overline{\text{Cos.}w''}^2$$

$$+\frac{1}{ss'}\overline{\text{Cos.}w}^2\overline{\text{Sin.}w'}^2+\frac{1}{ss''}\overline{\text{Cos.}w}^2\overline{\text{Sin.}w''}^2+\frac{1}{s's''}\overline{\text{Cos.}w'}^2\overline{\text{Sin.}w''}^2.$$

Hieraus folgt $\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2=$

$$\frac{1}{ss'}(\overline{\text{Sin.}w}^2\overline{\text{Cos.}w'}^2-2\,\text{Sin.}w\,\text{Cos.}w'\,\text{Cos.}w\,\text{Sin.}w'+\overline{\text{Cos.}w}^2\,\overline{\text{Sin.}w'}^2)$$

$$+\frac{1}{ss''}(\overline{\text{Sin.}w}^2\overline{\text{Cos.}w''}^2-2\,\text{Sin.}w\,\text{Cos.}w''\,\text{Cos.}w\,\text{Sin.}w''+\overline{\text{Cos.}w}^2\overline{\text{Sin.}w''}^2)$$

$$+\frac{1}{s's''}(\overline{\text{Sin.}w'}^2\overline{\text{Cos.}w''}^2-2\,\text{Sin.}w'\,\text{Cos.}w''\,\text{Cos.}w'\,\text{Sin.}w''+\overline{\text{Cos.}w'}^2\overline{\text{Sin.}w''}^2),$$

$$=\frac{1}{ss'}\overline{\text{Sin.}(w-w')}^2+\frac{1}{ss''}\overline{\text{Sin.}(w-w'')}^2+\frac{1}{s's''}\text{Sin.}(w'-w'')^2.$$

Also ist, wenn s, s', s'' positiv sind, mithin der gesuchte Punkt innerhalb des durch die drey gegebenen Punkte gebildeten Dreyeks liegt, so wohl $\frac{d^2.z}{dx^2}$ als $\frac{d^2z}{dy^2}$ positiv, und zugleich $\frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$ eine positive Größe. Folglich findet wirklich ein Minimum statt, wenn s, s', s'' positiv sind, das ist auf den Schenkeln der Winkel von 120° selbst, nicht aber auf ihren Verlängerungen liegen.

§. 59. Soll die Summe der Producte der Entfernungen s, s', s'' in die gegebenen Zahlen m, m', m'' ein Minimum werden; so wird man haben

$$z=ms+m's'+m''s'',$$

$$\frac{dz}{dx}=m\frac{ds}{dx}+m'\frac{ds'}{dx}+m''\frac{ds''}{dx},$$

$$=m.\frac{x-a}{s}+m'.\frac{x-a}{s'}+m''.\frac{x-a''}{s''},$$

$$=m\,\text{Sin.}w+m'\,\text{Sin.}w'+m''\,\text{Sin.}w''.$$

$$\frac{dz}{dy}=m\frac{ds}{dy}+m'\frac{ds'}{dy}+m''\frac{ds''}{dy},$$

$$=m\,\text{Cos.}w+m'\,\text{Cos.}w'+m''\,\text{Cos.}w''.$$

Da nun so wohl $\frac{dz}{dx}$ als $\frac{dz}{dy}=0$ seyn müßen; so wird man, wenn $m''\,\text{Sin.}w''$ und $m''\,\text{Cos.}w''$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht, und die Quadrate genommen werden, erhalten

$$m^2 \overline{\text{Sin.}w}^2 + 2m.m' \text{Sin.}w \text{Sin.}w' + m'^2 \overline{\text{Sin.}w'}^2 = m''^2 \overline{\text{Sin.}w''}^2,$$

$$m^2 \overline{\text{Cos.}w}^2 + 2m.m' \text{Cos.}w \text{Cos.}w' + m'^2 \overline{\text{Cos.}w'}^2 = m''^2 \overline{\text{Cos.}w''}^2,$$

$$m^2 + 2m.m' (\text{Cos.}w \text{Cos.}w' + \text{Sin}w\text{Sin.}w') + m'^2 = m''^2,$$

oder $m^2 + m'^2 + 2mm' \text{Cos.}(w - w') = m''^2,$

mithin $$\text{Cos.}(w - w') = -\frac{m^2 + m'^2 - m''^2}{2mm'}.$$

Ebenso findet man, wenn $m' \text{Sin.}w'$ und $m' \text{Cos.}w'$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gesezt werden

$$\text{Cos.}(w - w'') = -\frac{m^2 + m''^2 - m'^2}{2mm''},$$

und auf ähnliche Weise

$$\text{Cos.}(w' - m'') = -\frac{m'^2 + m''^2 - m^2}{2m'm''}.$$

Die gegebenen Zahlen m, m', m'' müßen also, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, so beschaffen seyn, daß die Ausdrücke der Cosinus ächte Brüche werden, zu welchem Ende je zwey der gegebenen Zahlen zusammen genommen größer seyn müßen als die dritte.

Man denke sich ein Dreyek verzeichnet, dessen Seiten sich wie die Zahlen m, m', m'' verhalten so werden $w - w'$, $w - w''$, $w' - w''$ die äusseren Winkel dieses Dreyeks seyn, und man wird innerhalb des Dreyeks, an dessen Spitzen die drey gegebenen Punkte liegen, einen Punkt so bestimmen können, daß die aus diesem Punkt an die Spitzen des Dreyeks gezogenen geraden Linien die gegebenen Winkel $2R - (w - w')$, $2R - (w - w'')$, $2R - (w' - w'')$ mit einander machen, wenn anders diese Winkel größer sind als die Winkel des gegebenen Dreyeks.

Eben diese Aufgabe kann auch auf folgende Art aufgelöst werden. Man denke sich die drey gegebenen Punkte durch gerade Linien mit einander verbunden, setze den Abstand des gesuchten Punkts von einem der gegebenen Punkte $= x$, und den Winkel, welchen diese Linie mit einer der anliegenden Seiten des gegebenen Dreyeks macht, $= y$; so sind, wenn man die drey Seiten des gegebenen Dreyeks mit a, b, c, und die Gegenwinkel dieser Seiten mit A, B, C bezeichnet, die Entfernungen des gesuchten Punkts von den drey gegebenen Punkten

$$x,$$

$$\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \text{Cos.}y},$$

$$\sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \text{Cos.}(C - y)},$$

und die Summe der Produkte dieser Entfernungen in die gegebenen Zahlen m, m', m'' ist

$$z = mx + m'' \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \text{Cos.}y}$$
$$+ m'' \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \text{Cos.}(C - y)}.$$

Man wird also haben

$$\frac{dz}{dx} = m + \frac{m'(x - a\,\text{Cos.}\,y)}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,y}} + \frac{m''(x - b\,\text{Cos.}\,(C-y))}{\sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\,\text{Cos.}\,(C-y)}} = 0,$$

$$\text{und } \frac{dz}{dy} = \frac{m'ax\,\text{Sin.}\,y}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,y}} - \frac{m''bx\,\text{Sin.}\,(C-y)}{\sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\,\text{Cos.}\,(C-y)}} = 0.$$

Es ist aber $\frac{a\,\text{Cos.}\,y - x}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,y}}$ der Cosinus des Winkels, welchen die Verlängerung der Linie x mit der aus dem gesuchten Punkt an die Spitze B des Dreyeks gezogenen geraden Linie einschließt, und

$\frac{a\,\text{Sin.}\,y}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,y}}$ ist der Sinus dieses Winkels. Eben so sind

$\frac{x - b\,\text{Cos.}\,(C-y)}{\sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\,\text{Cos.}\,(C-y)}}$ und $\frac{b\,\text{Sin.}\,(C-y)}{\sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\,\text{Cos.}\,(C-y)}}$ beziehungsweise die Cosinus und Sinus des Winkels, welchen die Verlängerung der Linie x mit der aus dem gesuchten Punkt an die Spitze A des Dreyeks gezogenen geraden Linie macht. Folglich wird man, wenn die Winkel, welche die Linie x selbst mit den aus dem gesuchten Punkt an B und A gezogenen geraden Linien einschließt, beziehungsweise mit u und u' bezeichnet werden, die zwey Gleichungen haben

$$m + m'\,\text{Cos.}\,u + m''\,\text{Cos.}\,u' = 0,$$

$$m'\,\text{Sin.}\,u - m''\,\text{Sin.}\,u' = 0,$$

woraus wiederum folgt, daß die drey an dem gesuchten Punkt liegende Winkel den äusseren Winkeln eines Dreyeks gleich seyn müßen, dessen Seiten sich wie m, m', m'' verhalten.

§. 60. Es sind jezt diejenigen Fälle zu betrachten, in welchen die Exponenten der Differentialverhältniße unbestimmt scheinen, oder unmöglich werden, wenn man der veränderlichen Größe gewiße bestimmte Werthe giebt. Wenn nemlich gleich die Differenz einer jeden Function der veränderlichen Größe x im Allgemeinen sich in eine Reihe von der Form $P'\Delta x + Q'\Delta x^2 + \&c.$ entwickeln läßt; so kann doch für gewiße bestimmte Werthe von x diese Entwiklung unmöglich werden (§. 4.), und man wird, wenn dieser Fall eintritt, die Kennzeichen der größten und kleinsten Werthe nicht mittelst der Differentiale erhalten können. Wenn aber die Exponenten der zweyten oder höheren Differentialverhältniße unter der Form eines Bruchs vorkommen, dessen Zähler und Nenner für einen gewißen Werth der veränderlichen Größe, von welcher er abhängt, zugleich verschwinden, und daher der Werth des Bruchs unbestimmt scheint; so

giebt die Differentialrechnung ein einfaches Mittel, den Werth des Bruchs für diesen Werth der veränderlichen Größe zu bestimmen.

Sey $y = \frac{Fx}{fx}$, und es werde so wohl Fx als $fx = 0$ für einen gewißen Werth a von x, worunter auch 0 begriffen seyn kann; so wird man für jeden anderen Werth von x die Gleichung haben

$yfx = Fx$, und wenn man differentiirt

$$y\,\frac{d.fx}{dx} + fx.\,\frac{dy}{dx} = \frac{d.Fx}{dx}$$

oder $yf'x + fx.\,\frac{dy}{dx} = F'x.$

Wenn nun für $x = a$ die Functionen $f'x$ und $F'x$ nicht zugleich verschwinden; so wird, weil $fx = 0$ ist für $x = a$ (Voraussez.),

$yf'a = F'a$ und $y = \frac{F'a}{f'a}$ für $x = a$.

Wenn aber für $x = a$ auch $f'x$ und $F'x$ verschwinden; so würde nach dem vorhergehenden Fall, wenn man $\frac{d^2fx}{dx^2} = f''x$, und $\frac{d^2Fx}{dx^2} = F''x$ sezt,

$y = \frac{F''a}{f''a}$ für $x = a$.

Verschwinden $F''x$ und $f''x$ zugleich für $x = a$; so wird wenn $\frac{d^3Fx}{dx^3}$ oder $F'''x$, und $\frac{d^3fx}{dx^3}$ oder $f'''x$ nicht zugleich verschwinden,

$y = \frac{F'''a}{f'''a}$ für $x = a$.

Da nun $f(x+z) = fx + \frac{z}{1}\frac{d.fx}{dx} + \frac{z^2}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \&c.$

so können die Differentiale von fx für $x = a$ nicht alle zugleich verschwinden, weil sonst $f(a+z) = 0$ seyn müßte, was auch der Werth von z seyn mag, und daher fx gegen die Voraussetzung keine veränderliche Größe wäre. Man wird also immer auf Differentiale von fx und Fx kommen, welche nicht zugleich verschwinden, vorausgesezt, daß für

$x=a$ die Differentiale von Fx und fx von irgend einer Ordnung nicht zugleich unendlich werden, welcher Fall alsdenn eintreten könnte, wenn dieselben der Factor $x-a$ im Nenner hätten, und von welchem in dem folgenden §. die Rede seyn wird.

Sey z. B. $y = \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$, $= \frac{0}{0}$ für $x = a$.

Hier ist $\frac{d.(x^3-a^3)}{dx} = 3x^2$, $= 3a^2$ für $x = a$,

$\frac{d(x^2-a^2)}{dx} = 2x$, $= 2a$ für $x = a$.

Folglich wird $y = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a$ für $x = a$.

Sey $y = \frac{a^x - b^x}{x}$, $= \frac{0}{0}$ für $x = 0$; so ist

$\frac{d.(a^x-b^x)}{dx} = a^x \text{Lg.} a - b^x \text{Lg.} b$, $= \text{Lg.} a - \text{Lg.} b$ für $x = 0$,

$\frac{d.x}{dx} = 1$, und daher $y = \text{Lg.} a - \text{Lg.} b = \text{Lg.} \frac{a}{b}$ für $x = 0$.

Sey $y = \frac{x^5 - 5a^2x^3 + 5a^3x^2 - a^5}{x^4 - 2ax^3 + 2a^3x - a^4} = \frac{P}{Q}$, $= \frac{0}{0}$ für $x = a$;

so ist $\frac{dP}{dx} = 5x^4 - 15a^2x^2 + 10a^3x$, $= 0$ für $x = a$,

und $\frac{dQ}{dx} = 4x^3 - 6ax^2 + 2a^3$, $= 0$ für $x = a$.

Nimmt man die zweyten Differentiale; so ist

$\frac{d^2P}{dx^2} = 20x^3 - 30a^2x + 10a^3$, $= 0$ für $x = a$,

$\frac{d^2Q}{dx^2} = 12x^2 - 12ax$, $= 0$ für $x = a$.

Man nehme die dritten Differentiale; so ist

$\frac{d^3P}{dx^3} = 60x^2 - 30a^2$, $= 30a^2$ für $x = a$,

$\frac{d^3Q}{dx^3} = 24x - 12a$, $= 12a$ für $x = a$.

Folglich ist $y = \frac{30a^2}{12a} = \frac{5}{2}a$ für $x = a$.

§. 61. Es sey jezt $y = \frac{P}{Q} = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{5}{2}}}{(x-a)^{\frac{5}{2}}}$, $= \frac{0}{0}$ für $x=a$; so ist

$$\frac{dP}{dx} = 3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}, = 0 \text{ für } x=a,$$

$$\frac{dQ}{dx} = \tfrac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}, = 0 \text{ für } x=a.$$

Ferner ist $\frac{d^2P}{dx^2} = 3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2-a^2}}, = \infty$ für $x=a$,

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{3}{\sqrt[4]{x-a}}, = \infty \text{ für } x=a.$$

Da nun bey dem ferneren Differentiiren die Exponenten immer um eine Einheit vermindert werden; so werden alle folgenden Differentiale negative Potenzen von x^2-a^2 und $x-a$ enthalten, und daher für $x=a$ unendlich werden. Mithin wird das in dem vorhergehenden §. gezeigte Verfahren alsdenn nicht anwendbar seyn, wenn die Voraussetzung $x=a$ eine oder mehrere der in der Function enthaltenen Wurzelgrößen verschwinden macht, es sey denn, daß man vorher durch Erhebung auf Potenzen die Function rational gemacht habe. In obigem Beyspiel wird

$$y^2 = \frac{(x^2-a^2)^3}{(x-a)^3} = \frac{P}{Q}.$$

$$\frac{dP}{dx} = 6x(x^2-a^2)^2, = 0 \text{ für } x=a,$$

$$\frac{dQ}{dx} = 3(x-a)^2, = 0 \text{ für } x=a.$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 6(x^2-a^2)^2 + 24x^2(x^2-a^2), = 0 \text{ für } x=a,$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 6(x-a), = 0 \text{ für } x=a.$$

$$\frac{d^3P}{dx^3} = 24x(x^2-a^2) + 48x(x^2-a^2) + 48x^3, = 48a^3 \text{ für } x=a,$$

$$\frac{d^3Q}{dx^3} = 6.$$

Folglich ist $y^2 = \frac{48a^3}{6} = (2a)^4$ für $x=a$,

und $y = \pm 2a\sqrt{2a}$.

Allgemein anwendbar und in den meisten Fällen bequemer ist folgende Methode. Wenn $y = \frac{0}{0}$ wird für $x = a$; so setze man $a + z$ statt x, und entwikle die Wurzelgrößen mittelst des Binomialtheorems so weit, bis man auf höhere Potenzen von z kommt, als diejenige sind, welche der rationale Theil der Function enthält. Da für $z = 0$, d. i. für $x = a$, Zähler und Nenner verschwinden (Voraussf.); so werden sich diejenige Glieder, welche kein z enthalten, gegen einander aufheben, und man wird Zähler und Nenner mit der niedrigsten Potenz von z dividiren können. Sezt man nach dieser Division $z = 0$; so erhält man den Werth des Bruchs für $x = a$.

Sey z. B. $y = \frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}}$, welcher Bruch $= \frac{0}{0}$ wird für $x = a$.

Sezt man $x = a + z$; so wird

$$y = \frac{2a^3 + 2a^2z - az^2 + z^3 - 2a^3\sqrt{1 + \frac{2z}{a}}}{-2a^2 + z^2 + 2a^2\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}}},$$

$$= \frac{\frac{5}{4}\frac{z^4}{a} + \ldots}{-\frac{1}{4}\frac{z^4}{a^2} - \ldots} = \frac{\frac{5}{a} + \ldots}{-\frac{1}{a^2} - \ldots}, = -5a, \text{ für } z = 0, \text{ oder für } x = a.$$

§. 62. Es sey nun $y = b + \sqrt[3]{a(a-x)^2}$, und man soll den Werth von x bestimmen, für welchen y am kleinsten wird. Da die Größe unter dem Wurzelzeichen beständig positiv ist; so wird y am kleinsten, wenn die Wurzelgröße verschwindet, mithin $x = a$ ist.

Man setze $x = a + z$; so wird, wenn der diesem Werth von x entsprechende Werth von y mit $y' + \Delta y'$ bezeichnet wird,

$$y' + \Delta y' = b + \sqrt[3]{az^2} = b + a^{\frac{1}{3}} \cdot z^{\frac{2}{3}}$$

und der kleinste Werth von y ist $= b$, weil, so lange z nicht

$= 0$ ist, jeder andere Werth von y größer wird, man mag z positiv oder negativ nehmen.

Wendet man auf diesen Fall die in dem 51sten §. gezeigte Methode an; so wird $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}$, welches niemals $= 0$, und unendlich wird für $x = a$, zum Anzeigen, daß für diesen bestimmten Werth von x die Differenz der vorgegebenen Function nicht mittelst des Taylorischen Satzes in eine Reihe von der Form $P'z + P''z^2 + \&c.$ entwickelt werden könne. Man muß also um die größten und kleinsten Werthe zu finden, $a + z$ statt x in diese Function setzen, die Wurzelgrößen nach dem Binomialtheorem entwickeln, und hernach untersuchen, ob der Werth der Function $f(a \pm z)$ kleiner oder größer sey als fa, die veränderliche Größe z, mag positiv oder negativ, und so klein seyn, als man will.

Eben diese Methode wird auch öfters in denjenigen Fällen, in welchen die Differentiale möglich sind, vortheilhaft können angewendet werden.

Sey z. B. $y = a + x^m (b-x)^n$, und m, n seyen positive ganze Zahlen;

so ist $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(b-x)^n - nx^m(b-x)^{n-1}$

$$x^{m-1}(b-x)^{n-1}(mb-(m+n)x),$$

und $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$, oder für $x = b$, oder für $x = \frac{mb}{m+n}$.

Für den letzteren Werth von x wird man finden

$\frac{d^2y}{dx^2} = -(m+n)\left(\frac{mb}{m+n}\right)^{m-1}\left(\frac{nb}{m+n}\right)^{n-1}$, so daß für diesen Werth von x die Function y ein Maximum wird.

Für $x = 0$ oder für $x = b$ aber wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, und man müßte die folgenden Differentiale untersuchen (§. 51.), um zu finden, ob ein Maximum oder Minimum diesen Werthen von x entspreche.

Kürzer erhält man die Kennzeichen des Maximums oder Minimums so. Es ist $x^m(b-x)^n$ nothwendig positiv, wenn $x < b$, und m eine gerade Zahl ist, man mag übrigens x positiv oder negativ nehmen. Hingegen ändert diese Größe ihre Zeichen, wenn m eine ungerade Zahl ist. Folglich wird die Function für $x = 0$ ein Minimum, wenn m eine gera-

de, aber weder ein Minimum noch Maximum, wenn m eine ungerade Zahl ist.

Man seße ferner $x = b + z$; so wird

$$y = a + (b + z)^m (-z)^n$$

und aus demselben Grund wie vorhin für $x = b$ ein Minimum, wenn n eine gerade Zahl ist. Hingegen entspricht diesem Werth von x weder ein Minimum, noch ein Maximum, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Bey dieser Function findet also immer ein Maximum statt, welches dem Werth $\frac{mb}{m+n}$ von x entspricht. Sind m und n gerade positive Zahlen, so giebt es überdieß zwey gleiche Minima, nemlich für $x = 0$, und $x = b$. Wenn aber m oder n ungerade sind; so giebt es nur ein Minimum, im ersten Fall für $x = b$, im lezteren für $x = 0$. Endlich wenn so wohl m als n ungerade sind; so giebt es kein Minimum.

Fünftes Capitel.

Von den Tangenten krummer Linien.

§. 63. Eine gerade Linie MT (Fig. 1. 2.), welche einen Bogen Mm einer krummen Linie in einem Punkt M so trifft, daß durch diesen Punkt keine andere gerade Linie zwischen der MT und dem Bogen Mm kann durchgezogen werden, heißt eine Tangente der krummen Linie, und der Punkt M der Berührungspunkt. Man ziehe die Ordinate PM an den Berührungspunkt, und T sey der Punkt, in welchem die Tangente MT der wo nöthig verlängerten Axe AK der Abscissen begegnet; so heißt das zwischen der Ordinate PM und der Tangente MT liegende Segment PT der Axe die Subtangente.

Die Aufgabe, an einen gegebenen Punkt einer gegebenen krummen Linie eine Tangente ziehen, wird sich nun auf folgende Art auflösen lassen. Es sey geschehen, und die gerade Linie MT berühre die krumme Linie in dem Punkt M. Man seße $AP = x$, $PM = y$, und ziehe durch einen anderen Punkt m des Bogens Mm, welcher erstlich ganz gegen die Axe AP hol sey (Fig. 1.), und den Berührungspunkt M eine gerade Linie mP, welche der Axe AP in S begegne. An den Punkt m ziehe man die Ordinate pm welche der Tangente MT in t, und einer durch den Berührungspunkt M

mit der Axe parallel gezogenen MR in R begegne; so verhält sich

$$\left.\begin{matrix} Rm \\ \Delta y \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} MR \\ \Delta x \end{matrix}\right\} = PM : PS,$$

und $Rt : MR = PM : PT$.

Da der Bogen Mm hol ist gegen AP (Voraussf.); so ist $Rm < Rt$, und daher $PS > PT$. Das veränderliche Verhältniß von $\Delta y : \Delta x$ oder von $PM : \left\{\begin{matrix} PS \\ PT+TS \end{matrix}\right\}$ ist also beständig kleiner als das gegebene Verhältniß von $PM : PT$, wie klein auch Δx und Δy seyn mögen, nähert sich aber demselben desto mehr, je näher der Punkt m an den Punkt M rükt, je kleiner mithin Δx und Δy werden, so daß das Verhältniß von $\Delta y : \Delta x$ größer gemacht werden kann, als jedes gegebene Verhältniß, welches kleiner als das von $PM : PT$ ist. Denn es sey irgend ein kleineres Verhältniß als das von $PM : PT$, z. B. das von $PM : PT+q$ gegeben. Man nehme zwischen T und S einen Punkt s' so, daß $Ts' < q$ sey, und ziehe durch s' und M eine gerade Linie, deren Verlängerung über den Punkt M hinaus zwischen Mt und Mm fallen, und, weil die MT die krumme Linie in dem Punkt M berührt (Voraussf.) dem Bogen Mm in m' zwischen M und m begegnen wird. Durch den Punkt m' ziehe man die Parallele $p't'$ mit PM, welche der Tangente in t', und der MR in r' begegne; so verhält sich

$$\left.\begin{matrix} r'm' : Mr' \\ \Delta y : \Delta x \end{matrix}\right\} = PM : Ps'$$
$$= PM : PT+Ts'$$
$$> PM : PT+q, \text{ weil } q > Ts' \text{ (Constr.)}.$$

Es ist also beständig $\Delta y : \Delta x < PM : PT$, aber man kann Δx und Δy so klein nehmen, daß $\Delta y : \Delta x > PM : PT+q$, wie klein auch q seyn mag. Folglich ist (§. 6.)

$$dy : dx = PM : PT.$$

Der Bogen Mm sey zweytens erhaben gegen die Axe AK (Fig. 2.); so ist unter der Voraussetzung der vorigen Construction

$$\left.\begin{matrix} Rm : MR \\ \Delta y : \Delta x \end{matrix}\right\} > Rt : MR \text{ oder } > PM : PT.$$

Aber man kann Δx und Δy so klein nehmen, daß das

Ver-

Verhältniß von $\Delta y : \Delta x$ kleiner wird als das Verhältniß von $PM : PT - q$, wie klein auch q seyn mag, wenn man zwischen T und S einen Punkt s' so nimmt, daß $Ps' > PT - q$, $Ts' < q$ ist, durch s' und M eine gerade Linie zieht, welche über den Punkt M hinaus verlängert dem Bogen Mm in m' zwischen M und m' begegnen wird, und durch m' eine Parallele $p'm'$ mit PM zieht. Denn für den Werth Pp' von Δx verhält sich

$$\left.\begin{matrix} r'm' : Mr' \\ \Delta y : \Delta x \end{matrix}\right\} = PM : Ps'$$
$$= PM : PT - Ts'$$
$$< PM : PT - q, \text{ weil } q > Ts' \text{ (Constr.).}$$

Da nun $\Delta y : \Delta x$ beständig $> RM : PT$, aber Δx und Δy so klein genommen werden können, daß $\Delta y : \Delta x = PM : PT - q$, wie klein auch q seyn mag; so ist

$$dy : dx = PM : PT.$$

Vermöge der Voraussetzung ist aber die krumme Linie gegeben, und die unter einem gegebenen Winkel APM an die Abscissenlinie AK gezogene Ordinate PM ist eine gegebene Function der Abscisse AP; folglich ist mittelst der Regeln der Differentialrechnung das Verhältniß von $dy : dx$ oder von $PM : PT$, und dadurch die Lage der Tangente gegeben.

§. 64. Umgekehrt, wenn man an einen Punkt M (Fig. 3. 4.) einer krummen Linie BMm eine gerade Linie MT so zieht, daß $PM : PI = dy : dx$, oder $PT = y \frac{dx}{dy}$; so berührt die MT die krumme Linie in dem Punkt M.

Bew. Man ziehe durch irgend einen Punkt m des Bogens Mm die Parallele pmt mit der Ordinate PM, und durch M die Parallele MR mit AP; so ist

$$Rt : \left\{\begin{matrix} MR \\ \Delta x \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} PM : PT \\ dy : dx \text{ (Voraus\ss.)} \end{matrix}\right., \text{ und daher}$$

$$Rt = \Delta x \frac{dy}{dx}, \; pt = \left\{\begin{matrix} pR \\ PM \end{matrix}\right\} + Rt = y + \frac{\Delta x}{1} \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{Aber } pm = y + \frac{\Delta x}{1} \frac{dy}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3} \frac{d^3y}{dx^3} + \text{\&c. (§. 20.);}$$

folglich ist 1.) $pm = pt + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \&c.$

Es sey Δx so klein genommen, daß jedes Glied dieser Reihe die Summe aller folgenden übertreffe, und $\frac{d^2y}{dx^2}$ sey erstlich negativ; so ist für diesen Werth von Δx, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe desselben $pm < pt$ (Fig. 3.). Mithin ist, wenn Pp diesem Werth von Δx gleich, der noch kleiner genommen wird, die gerade Linie Mt ganz ausserhalb des Bogens Mm, welcher in diesem Fall gegen die Axe AP hol seyn wird. Könnte nun durch den Punkt M eine gerade Linie zwischen der Mt und dem Bogen Mm durch gezogen werden; so müßte sie durch einen zwischen m und t liegenden Punkt s der pt gehen, und der Axe der Abscissen in einem Punkt S so begegnen, daß $PS > PT$. Es

ist aber $Rm = \Delta y = \frac{\Delta x}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$

$$= \Delta x.\frac{PM}{PT} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$

und $RS = \frac{PM \times MR}{PS} = \frac{PM}{PS}\cdot\Delta x;$

folglich $Rm - Rs = \frac{\Delta x}{1}\left(\frac{PM}{PT} - \frac{PM}{PS}\right) + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$

so daß $Rm - Rs$ negativ, also $Rs > Rm$, und s ausserhalb der krummen seyn wird, so lange die Summe der positiven Glieder dieser Reihe kleiner ist als die Summe der negativen. Da aber $PT < PS$ mithin das erste Glied der Reihe positiv ist; so wird man Δx so klein nehmen können, daß für diesen Werth von Δx, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe desselben, das erste Glied größer wird, als die Summe aller folgenden. Folglich wird, wenn tp' einer dieser Werthe von Δx ist, $r'm' - r's'$ positiv, $r'm' > r's'$ seyn, und daher der Punkt s' der Ms, und um so mehr jeder andere zwischen M und s' liegende Punkt derselben, innerhalb der krummen Linie fallen. Demnach schneidet die gerade Linie Ms den Bogen Mm zwischen M und m, und zwischen Mt und dem Bogen Mm geht keine andere gerade Linie durch.

Es sey zweytens $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv; so ist, wenn man *Pp* oder Δx so klein nimmt, daß jedes Glied der Reihe n. 1. die Summe aller folgenden übertrifft, für diesen Werth von Δx, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe desselben, $pm < pt$. In diesem Fall ist also der Bogen *Mm* erhaben gegen die Axe *AP* (Fig. *A.*), und er liegt ganz ausserhalb der geraden Linie *Mt*. Eine gerade Linie, welche zwischen dem Bogen *Mm* und der *Mt* sollte durchgehen können, müßte also durch einen zwischen *m* und *t* liegenden Punkt *s* der *pm* gehen, und der Axe *AP* in einem Punkt *S* so begegnen, daß $PS < PT$. Man findet aber wie in dem vorhergehenden Fall

$$Rm - Rs = \left(\frac{PM}{PT} - \frac{PM}{PS}\right)\Delta x + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \text{&c.}$$

folglich ist jezt das erste Glied dieser Reihe negativ, und *Rm* nur so lange größer als *Rs*, als die Summe der positiven Glieder die Summe der negativen übertrifft. Man nehme Δx so klein, daß das erste Glied die Summe aller folgenden übertreffe; so ist, wenn *Pp'* dieser Werth von Δx ist, für diesen Werth, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe, $r'm' - r's'$ negativ, also $r's' > r'm'$. Demnach schneidet die gerade Linie *Ms* den Bogen *Mm* zwischen *M* und *m*, und zwischen der *Mt* und dem Bogen *Mm* geht keine andere gerade Linie durch.

Ebenso kann gezeigt werden, daß auch auf der anderen Seite des Punkts *M* zwischen *MT* und dem Bogen *BM* keine andere gerade Linie durchgehe.

Wenn also die gerade Linie *MT* die krumme Linie in dem Punkt *M* so trifft, daß $dy : dx = PM : PT$; so kann zwischen dem an diesem Punkt liegenden Bogen der krummen Linie und der geraden *TMt* keine gerade Linie durch gezogen werden. Die gerade Linie *MT* berührt also die krumme Linie *BMm* in dem Punkt *M*.

§. 65. Hieraus folgt nun

1.) Daß an einen gegebenen Punkt eines gegebenen Bogens einer krummen Linie nur eine Tangente gezogen wer-

den könne. Wenn sich aber in dem gegebenen Punkt mehrere Aeste einer krummen Linie schneiden, so kann die krumme Linie selbst an diesem Punkt mehrere Tangenten haben, aber jeder Bogen nur eine.

2.) Vermöge der Reihe n. 1. des vorhergehenden §. ist, wenn *TMt* (Fig. 3. 4.) die krumme Linie in *M* berührt,

$$pm = pt + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \text{&c.}$$

Es sey Δx so klein genommen, daß jedes Glied dieser Reihe die Summe aller folgenden übertreffe; so ist *pm* auf beyden Seiten des Punkts *M* kleiner oder größer als *pt*, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv ist, und daher im ersten Fall die krumme Linie auf beyden Seiten des Punkts *M* eine Strecke hin hol, im zweyten erhaben gegen die Axe.

3.) Wenn aber für einen gewißen Punkt *M* (Fig. 5. 6.) der krummen Linie $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist; so ist für die auf diesen Punkt folgende Punkte *m*

$$pm = pt + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} + \text{&c.}$$

und auf der anderen Seite des Punkts *M* oder für negative Δx

$$p'm' = p't' - \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\overline{\Delta x}^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} - \text{&c.}$$

Es seyen wiederum Δx oder *Pp* und *Pp'* so klein genommen, daß jedes Glied die Summe aller folgenden übertreffe; so ist

$\left.\begin{matrix} pm > pt \\ p'm' < p't' \end{matrix}\right\}$ wenn $\frac{d^3y}{dx^3}$ negativ (Fig. 5.),

aber $\left.\begin{matrix} pm < pt \\ p'm' > p't' \end{matrix}\right\}$ wenn $\frac{d^3y}{dx^3}$ positiv (Fig. 6.).

Folglich ist im ersten Fall *Mm* gegen *AP* erhaben, und *Mm'* gegen *AP* hol, im zweyten Fall aber *Mm* gegen *AP* hol, und *Mm'* gegen *AP* erhaben. In beyden Fällen stosen in dem Punkt *M* zwey Bogen der krummen Linie an einander, welche in diesem Punkt eine gemeinschaftliche Tan-

gente haben, aber auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen. Diesen Punkt M nennt man einen Wendungspunkt (punctum flexus contrarii).

Wäre auch $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; so würde

$$pm = pt + \frac{\overline{\Delta x}^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{\overline{\Delta x}^5}{1.2\ldots5}\frac{d^5y}{dx^5} + \text{&c.}$$

und die krumme Linie wäre auf beyden Seiten von M gegen die Axe AP hol oder erhaben, je nachdem $\frac{d^4y}{dx^4}$ an dem Punkt M negativ oder positiv würde, u. s. w.

4.) Eine krumme Linie hat also keinen Wendungspunkt, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ beständig positiv oder negativ ist. Die Wurzeln der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ sind alsdenn unmöglich. Hingegen hat sie einen Wendungspunkt, wenn das lezte verschwindende Differential von einer geraden Ordnung ist, und die Ordinaten für positive und negative Werthe von Δx möglich sind.

5.) Wenn die Ordinate y selbst negativ ist; so ist die krumme Linie an denjenigen Punkten gegen die Axe hol oder erhaben, für welche $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv oder negativ ist. Allgemein ist die krumme Linie hol oder erhaben gegen die Axe, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit der Ordinate y verschiedene oder entgegengesezte Zeichen hat.

Für die Kegelschnitte z. B. ist, wenn p der Parameter, $2a$ die Axe ist, die allgemeine Gleichung

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2, \text{ und daher}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = p - \frac{p}{a}x,$$

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{a},$$

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{a} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$4y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2p}{a}y^2 - \left(2y\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$= -\frac{2p}{a}\left(px - \frac{p}{2a}x^2\right) - \left(p - \frac{p}{a}x\right)^2,$$

$$= -p^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3}.$$

Folglich ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv, je nachdem y positiv oder negativ ist, und daher sind die Kegelschnitte gegen ihre Axen hole krumme Linien.

§. 66. Man errichte auf der Tangente MT (Fig. 7. 8.) in dem Berührungspunkt M ein Perpendickel MN; so heißt das zwischen dem Berührungspunkt und der Axe AK begriffene Segment MN dieses Perpendickels die Normallinie, und das zwischen der Normallinie und der Ordinate PM liegende Segment PN der Axe die Subnormallinie.

Es sey erstlich der Coordinatenwinkel APM ein rechter (Fig. 7.); so ist, wenn man die Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$ sezt,

$$dy : dx = \left\{\begin{matrix} PM \\ y \end{matrix}\right\} : PT \text{ (§. 63.)},$$

und die Subtangente $PT = y\,\frac{dx}{dy}$.

Ferner ist

$$dx : dy = PT : PM = \left\{\begin{matrix} PM \\ y \end{matrix}\right\} : PN,$$

und daher die Subnormallinie $PN = y\,\frac{dy}{dx}$.

Sodenn ist $\overline{MN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$;

folglich die Normallinie $MN = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Hieraus ergeben sich die Tangenten und Sinus der Winkel, welche die berührende gerade Linie MT mit der Ordinate PM und der Axe AK macht. Denn es ist

$$\left.\begin{matrix} \text{Tg. } PMT \\ \text{Tg. } ANM \end{matrix}\right\} = \frac{PT}{PM} = \frac{dx}{dy}.$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Tg. } PTM \\ \text{Tg. } PMN \end{matrix}\right\} = \frac{PM}{PT} = \frac{dy}{dx}.$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Sin. } PMT \\ \text{Sin. } ANM \end{matrix}\right\} = \frac{PM}{PN} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Sin. } PTM\\ \text{Sin. } PMN\end{matrix}\right\} = \frac{PN}{MN} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}.$$

Sey zweytens der Coordinatenwinkel APM ein schiefer (Fig. 8.) und $= c$; so ist wiederum (§. 63.)

$dy : dx = PM : PT$, und daher

die Subtangente $PT = y \frac{dx}{dy}$.

Aber der Ausdruk für die Subnormallinie PN wird nicht mehr so einfach wie vorhin, weil jezt die Dreyecke APM und PMN nicht mehr einander ähnlich sind. Man ziehe MQ auf die Axe AK senkrecht; so sind

$PQ = PM \text{ Cos. } APM = y \text{ Cos. } c$,

$MQ = PM \text{ Sin. } APM = y \text{ Sin. } c$,

$TQ = PT - PQ = y \frac{dx}{dy} - y \text{ Cos. } c$.

Da nun $TQ : MQ = MQ : QN$,

d. i. $y \frac{dx}{dy} - y \text{ Cos. } c : y \text{ Sin. } c = y \text{ Sin } c : \left\{\begin{matrix}QN\\ PN + y \text{ Cos. } c\end{matrix}\right\}$;

so ist $\left(\frac{dx}{dy} - \text{Cos. } c\right) PN - y \frac{dx}{dy} \text{ Cos. } c - y \overline{\text{Cos. } c} = y \text{ Sin. } c^2$,

und die Subnormallinie

$$PN = \frac{y - y\frac{dx}{dy} \text{ Cos. } c}{\frac{dx}{dy} - \text{Cos. } c} = \frac{y\frac{dx}{dy} - y \text{ Cos. } c}{1 - \frac{dy}{dx} \text{ Cos. } c}.$$

Ferner ist $\overline{MT}^2 = \overline{PT}^2 \left(1 + \left(\frac{PM}{PT}\right)^2 - 2\frac{PM}{PT} \text{ Cos. } c\right)$,

$$= y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right) \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} \text{ Cos. } c\right).$$

Aber $TQ : MT = MQ : MN$; folglich ist die Normallinie

$$MN = \frac{y \text{ Sin. } c}{1 - \frac{dy}{dx} \text{ Cos. } c} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} \text{ Cos. } c}.$$

Die Tangenten der Winkel PMT und PTM erhält man durch die Auflösung des Dreyeks PMT, in welchem

man den Winkel $MPT = c$, und das Verhältniß der ihn einschließenden Seiten $PM : PT = dy : dx$ kennt. Man findet

$$\text{Tg. } PMT = \frac{PT \text{ Sin. } c}{PM - PT \text{ Cos. } c} = \frac{\frac{dx}{dy} \text{ Sin. } c}{1 - \frac{dx}{dy} \text{ Cos. } c}.$$

$$\text{Tg. } PTM = \frac{PM \text{ Sin. } c}{PT - PM \text{ Cos. } c} = \frac{\frac{dy}{dx} \text{ Sin. } c}{1 - \frac{dy}{dx} \text{ Cos. } c}.$$

Diese Formeln beziehen sich auf den in der Figur angenommenen Fall, wo die Subtangente von dem Fußpunkt der Ordinate an gegen den Anfangspunkt A der Abscissen hin sich erstrekt, und die Subnormallinie auf die Verlängerung der Abscisse AP fällt. Ferner hat man angenommen, der Coordinatenwinkel c sey auf derjenigen Seite der Ordinate, auf welche der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe fällt, spiz. Bekommen bey der Anwendung dieser Formeln auf andere Fälle die Subtangente oder Subnormallinie das entgegengesezte Zeichen von dem der Abscisse, so zeigt diß die entgegengesezte Lage von der in der Figur angenommenen an. Dieselbe Regel gilt für negative Ordinaten, weil dy und y ihre Zeichen zugleich ändern.

Für die Ellipse z. B. hat man, wenn ihre halbe Axen mit a und b bezeichnet, und die Abscissen x von dem Mittelpunkt der Ellipse an gerechnet werden, die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

folglich ist $y \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} x$,

oder die Subnormallinie

welche in diesem Fall nicht auf die Verlängerung der Abscisse fällt, sondern von der Ordinate an gegen den Anfangspunkt der Abscissen hin sich erstrekt.

Ferner ist $y \frac{dx}{dy} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{x} = -\frac{a^2 - x^2}{x}$.

oder die Subtangente

Folglich fällt die Subtangente auf die Verlängerung der Abscisse.

§. 67. Um an eine gegebene krumme Linie BM (Fig.

9.) eine Tangente MT zu ziehen, welche mit einer in ihrer Ebene der Lage nach gegebenen geraden Linie GH parallel sey, ziehe man auf eine zur Axe der Abscissen $AP = x$ angenommene gerade Linie KAP die Ordinaten $PM = y$ senkrecht. Da die krumme Linie gegeben ist; so ist eine Gleichung zwischen x und y gegeben. Und weil die gerade Linie GH der Lage nach gegeben ist; so ist der Winkel $AKG = k$ gegeben, unter welchem diese Linie die Axe schneidet. Die gerade Linie GH soll aber mit der Tangente MT parallel seyn; folglich muß seyn

$$\left.\begin{matrix}\text{Tg. } PTM \\ \text{oder } \frac{dy}{dx} \text{ (§. 66.)}\end{matrix}\right\} = \text{Tg. } k.$$

Mittelst der Differentialrechnung erhält man $\frac{dy}{dx}$ durch das Differentiiren der gegebenen Gleichung für die krumme Linie, also eine Gleichung zwischen x, y und der gegebenen Größe Tg. k, und durch die Verbindung dieser Gleichung mit der für die krumme Linie die Werthe von x und y, wodurch der Berührungspunkt M gegeben ist.

Für die Parabel z. B. ist $y^2 = px$,

$$2y \frac{dy}{dx} = p,$$

$$\text{Tg. } k = \frac{p}{2y} \text{ oder } y = \tfrac{1}{2} p \text{ Cotg. } k.$$

Man hat also zur Bestimmung von x und y die zwey Gleichungen:

$y = \frac{1}{2} p$ Cotg. k

$y^2 = px$.

Aus der ersten folgt $y^2 = \frac{1}{4} p^2 \overline{\text{Cotg. } k}^2$; folglich muß seyn

$px = \frac{1}{4} p^2 \overline{\text{Cotg. } k}^2$,

$x = \frac{1}{4} p \overline{\text{Cotg. } k}^2$.

Für $k = 0$ wird die Aufgabe unmöglich.

Für die Ellipse ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$,

$$y \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} x;$$

folglich muß seyn Tg. $k = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$,

$$y \operatorname{Tg.} k = -\frac{b^2}{a^2} x,$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 \operatorname{Tg.} k^2 \\ \text{oder } \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \operatorname{Tg.} k^2 \end{array}\right\} = \frac{b^4}{a^4} x^2,$$

$$(a^2 - x^2) \operatorname{Tg.} k^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

$$x = \pm \frac{a \operatorname{Tg.} k}{\sqrt{\operatorname{Tg.} k^2 + \frac{b^2}{a^2}}} = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{Cotg.} k\right)}}.$$

Diese Aufgabe ist also immer möglich, weil x nicht größer als a werden kann, und an eine gegebene Ellipse können zwey Tangenten gezogen werden, welche mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel sind.

Für die Hyperbel hat man $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, und man findet wie vorhin

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \operatorname{Cotg.} k\right)^2}}.$$

Folglich muß, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, $\frac{b^2}{a^2} \operatorname{Cotg.} k^2 < 1$,

$\frac{b}{a} < \operatorname{Tg.} k$, d. i. k größer als der Winkel einer der Asymptoten mit der Querare seyn. Ist k größer als dieser Winkel; so ist, weil $x > a$, die Ordinate möglich, und man kann an die Hyperbel zwey Tangenten ziehen, welche mit ihrer Queerare den gegebenen Winkel k machen.

§. 68. An die gegebene krumme Linie BM (Fig. 9.) sey aus einem in ihrer Ebene gegebenen Punkt D eine Tangente DM zu ziehen.

Da der Punkt D gegeben ist; so ist das aus diesem Punkt auf die Axe AP der Abscissen gefällte Perpendickel DC, und das zwischen diesem Perpendickel und dem Anfangspnnkt A der Abscissen begriffene Segment AC der Axe gegeben. Man setze $AC = g$, $CD = h$, und ziehe DQ mit AP parallel, welche der an den Berührungspunkt M gezogenen senkrechten Ordinate PM in Q begegne. Die gerade Linie MT sey die gesuchte Tangente.

Da M, D und T in einer geraden Linie liegen sollen; so muß sich verhalten

$$\left.\begin{matrix} MQ \\ PM-PQ \\ PM-CD \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} DQ \\ CP \\ AP-AC \end{matrix}\right\} = PM : PT,$$

$$= dy : dx \text{ (§. 64.)},$$

oder $y-h : x-g = dy : dx$,

Man hat also die Gleichung

$$\frac{y-h}{x-g} = \frac{dy}{dx},$$

welche mit der Gleichung für die krumme Linie verbunden die dem Berührungspunkt entsprechende Werthe von x und y bestimmt

Die gegebene krumme Linie sey z. B. eine Parabel, deren Scheitel A, und Axe AP sey; so ist, wenn ihr Parameter p heißt,

$y^2 = px$, $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, und daher

$$\frac{p}{2y} = \frac{y-h}{x-g},$$

$$px - pg = 2y^2 - 2gy.$$

Aber $px = y^2$

folglich $-pg = y^2 - 2hy$,

$h^2 - pg = (y-h)^2$,

$y = h \pm \sqrt{h^2 - pg}$.

Soll die Aufgabe möglich seyn; so darf h^2 nicht kleiner als pg, d. i. nicht kleiner als das Quadrat der zu der Abscisse g gehörigen Ordinate der Parabel seyn. Der gegebene Punkt darf also nicht innerhalb der Parabel liegen. Erstrekte sich das Segment AC nach der entgegengesezten Richtung von der, nach welcher die Abscissen hin liegen; so würde g negativ, und in Beziehung auf die Parabel würde man haben

$y = h \pm \sqrt{h^2 + pg}$.

Die Aufgabe würde also immer möglich seyn, aber auch der gegebene Punkt nothwendig ausserhalb der Parabel liegen.

§. 69. Es sind jezt noch diejenigen Fälle zu betrachten, in welchen für gewiße bestimmte Werthe von x der Exponent $\frac{dy}{dx}$ des Differentialverhältnißes unbestimmt scheint, oder unendlich wird. Wenn $\frac{dy}{dx} = \frac{Fx}{fx}$, und so wohl Fx als fx für $x = a$ verschwinden; so findet man, wenn für diesen Werth von x nicht $\frac{d.Fx}{dx}$ oder $F'x$, und $\frac{d.fx}{dx}$ oder $f'x$

zugleich verschwinden, $\frac{dy}{dx} = \frac{F'a}{f'a}$ (§. 60.) für $x = a$. Verschwinden auch diese Differentiale zugleich für $x = a$; so muß man zu den zweyten Differentialen übergehen, u. s. w.

Wenn aber für die krumme Linie die Gleichung $F(x, y) = 0$ gegeben wäre, in welcher die veränderlichen Größen x und y mit einander vermengt sind; so würde man nach §. 42. haben

$$\frac{d.F(x,y)}{dx} + \frac{d.F(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

oder, wenn man die Exponenten der in Beziehung auf x und y genommenen Differentialverhältniße zur Abkürzung mit P und Q bezeichnet,

$$P + Q\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

Wenn nun für einen gewißen Werth a von x, mithin auch für einen gewißen Werth von y die Größen P und Q zugleich verschwinden; so kann aus dieser Gleichung der Werth von $\frac{dy}{dx}$ nicht gefunden werden. Man differentiire sie aufs neue; so hat man, weil P und Q Functionen von x und y zugleich sind,

$$\frac{dP}{dx} + \frac{d.P}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{d.Q}{dx} + \frac{d.Q}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + Q\,\frac{d^2y}{dx^3} = 0.$$

Sezt man in dieser Gleichung $x = a$; so wird $Q = 0$ (Voraus§.), und man erhält

$$\frac{d.P}{dx} + \frac{d.P}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d.Q}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d.Q}{dy} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

so daß $\frac{dy}{dx}$ durch die Auflösung dieser quadratischen Gleichung gefunden wird. Es laufen also in diesem Punkt zwey Aeste der krummen Linie zusammen, deren jeder eine eigene Tangente hat. Von dieser Differentialgleichung der zweyten Ordnung muß man auf die der dritten Ordnung übergehen, wenn für $x = a$ ihre Glieder sich zernichteten, u. s. w.

Hat man die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ gefunden; so ergeben sich die Ausdrücke der Subtangente und Subnormallinie nach

§. 66., wenn man die dem Werth $x = a$ entsprechende Werthe von y mit den Werthen von $\frac{dy}{dx}$ verbindet.

Die Gleichung für die krumme Linie zwischen den rechtwinklichten Ordinaten $AP = x$, $PM = y$ (Fig. 10.) sey z. B.

$x^3 + xy^2 - 5x^2 + 3x - 4y + 6 = 0$; so ist (§. 42.)

$$3x^2 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 10x + 3 - 4\frac{dy}{dx} = 0,$$

oder $3x^2 + y^2 - 10x + 3 + (2xy - 4)\frac{dy}{dx} = 0.$

Für $x = 1$ ist aber $y^2 - 4y + 4 = 0$, oder $(y-2)^2 = 0$, so daß für $AP = 1$ zwey Werthe von $y = PM = 2$ werden. Folglich wird, wenn man in der Differentialgleichung $x = 1$ und $y = 2$ sezt, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Man nehme die zweyte Differentialgleichung; so erhält man

$$6x + 2y\frac{dy}{dx} - 10 + \left(2y + 2x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + (2xy - 4)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$ und für

$x = 1$, $y = 2$, wird

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

Also ist $\frac{dy}{dx} = -2 \pm \sqrt{6}$ für $x = 1$.

Hieraus findet sich $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2 \pm \sqrt{6}} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$,

$$= 1 \pm \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Folglich sind, weil an diesem Punkt $y = 2$ ist, die zwey Subtangenten $2 \pm 2\sqrt{\frac{3}{2}}$, und es ist $PT = 2 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ von P an gegen dem Anfangspunkt der Abscissen hin zu nehmen. Die andere Subtangente ist $= -(2\sqrt{\frac{3}{2}} - 2)$, und daher muß man PT' dieser Größe gleich von P an auf der Verlängerung PK von AP nach der Richtung der positiven Abscissen nehmen. Die vorgegebene Gleichung sey

$x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = 0$ (Fig. 11.); so ist für $\left.\begin{matrix} AP \\ x \end{matrix}\right\} = 1$,

$y^2 - 2y + 1 = 0$, und es werden an diesem Punkt zwey Werthe von y oder PM einander gleich, und $= 1$.

Ferner ist $3x^2 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 4x - 2\frac{dy}{dx} = 0$,

und $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4x + y^2}{2 - 2xy} = \frac{0}{0}$ für $x = 1$.

Nimmt man die zweyte Differentialgleichung; so erhält man

$$6x - 4 + 2y\frac{dy}{dx} + 2\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + 2(xy - 1)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$ welche sich für $x = 1$, $y = 1$ auf folgende reducirt:

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0$, oder $\left(\frac{dy}{dx} + 1\right)^2 = 0$.

Also ist $\frac{dy}{dx} = -1$, und in dem Punkt M stoßen zwey Aeste MS und MCS' der krummen Linie an einander, welche daselbst eine gemeinschaftliche Tangente TM haben. Die Subtangente wird $= -1$, und daher fällt sie auf die Verlängerung von AP über den Punkt P hinaus.

Die Gleichung für die Conchoide (Fig. 12. 13. 14.) zwischen $CP = x$ und $PM = y$ ist $y^2 = \frac{b^2x^2}{(x-a)^2} - x^2$, und $y = 0$ für $x = 0$.

Hieraus erhält man

$$\frac{2ydy}{dx} = -\frac{2ab^2x}{(x-a)^3} - 2x, \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\left(\frac{ab^2}{(x-a)^3} + 1\right) = \frac{0}{0} \text{ für } x = 0.$$

Man nehme die zweyte Differentialgleichung; so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab^2}{(x-a)^3} + \frac{3ab^2x}{(x-a)^4} - 1, \text{ und}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} - 1, \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \text{ für } x = 0.$$

Dasselbe findet man, wenn man in dem Ausdruk von $\frac{dy}{dx}$ den Werth von $\frac{x}{y}$ durch x ausgedrükt substituirt.

Da nemlich $y^2 = \frac{b^2x^2}{(x-a)^2} - x^2$; so ist $\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{(x-a)^2} - 1 = \frac{b^2-(x-a)^2}{(x-a)^2}$, und daher

$\frac{x}{y} = \pm\frac{x-a}{\sqrt{b^2-(x-a)^2}}$. Folglich wird jezt

$$\frac{dy}{dx} = \mp\frac{x-a}{\sqrt{b^2-(x-a)^3}}\left(\frac{ab^2}{(x-a)^3} + 1\right), \text{ und, wenn man } x = 0 \text{ sezt,}$$

$$\frac{dy}{ax} = \pm\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(-\frac{b^2}{a^2} + 1\right)$$

$$= \mp\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right) = \mp\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}, \text{ wie vorhin.}$$

Diese krumme Linie hat also an dem Punkt C, für welchen die Abscisse $x = 0$ ist, zwey Tangenten, wenn $b > a$ (Fig. 12.). Ist $b = a$ (Fig. 13.); so wird an diesem Punkt $\frac{dy}{dx} = 0$, und die Tangente fällt mit der Axe der Abscissen zusammen. Wenn aber $b < a$ ist (Fig. 14.); so wird der

Ausdruk für $\frac{dy}{dx}$ imaginär, und die Tangente unmöglich. In diesem Fall sind die Quadrate von y negativ; so lange $x < a-b$ ist, und daher von $x=0$ an bis $x=a-b$ die Ordinaten unmöglich. Der Anfangspunkt der Abscissen ist ein zugeordneter Punkt der krummen Linie, und es kann von keiner Tangente derselben an diesem abgesondert liegenden Punkt die Rede seyn.

§. 70. Diejenigen Fälle betreffend, in welchen für gewiße Werthe der veränderlichen Größe x die Ausdrücke von y, $\frac{dy}{dx}$ u. s. w. unendlich werden, sey $y=P+Q(x-a)^n$, und P, Q seyen Functionen von x, welche den Factor $x-a$ nicht enthalten. Ist n eine negative Zahl; so wird y unendlich für $x=a$, und eine durch den Endpunkt dieser Abscisse mit den Ordinaten parallel gezogene gerade Linie begegnet der krummen Linie nicht mehr. Aber die Werthe von y können für kleinere oder größere Werthe von x, wie wenig sie auch von a verschieden seyn mögen, möglich seyn, und alsdenn wird sich die krumme Linie jener Parallellinie desto mehr nähern, je weiter man sie fortsezt, ohne sie jemals zu erreichen, oder die erwähnte gerade Linie wird eine Asymptote der krummen Linie seyn. Für die Conchoide hat man z. B.

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{(x-a)^2} - x^2,$$

und es wird y unendlich für $x=a$. Wenn man also von dem Anfangspunkt C (Fig. 12, 13, 14.) der Abscissen an $CD=a$ nimmt, und durch D eine gerade Linie EF auf CD senkrecht zieht; so wird diese der krummen Linie nicht mehr begegnen. Nimmt man aber auf beyden Seiten von D die DB und $DA=b$, und irgend einen Punkt e (Fig. 14.) der AB zwischen B und A; so wird ein aus e als Mittelpunkt mit einem Halbmesser $= b$ beschriebener Kreis der EF begegnen. Es geschehe in f, man ziehe fe, mit dieser durch C die Parallele CL, und nehme von dem Punkt g an, in welche die CL die EF schneidet, beyderseits $gm = gm' = BD=b$; so werden m und m' Punkte der Conchoide, und em wird mit EF parallel seyn. Denn zieht man $mq, m'q'$ auf EF senkrecht; so sind die rechtwinklichten Dreyecke gmq, $gm'q'$ und feD wegen der Gleichheit ihrer Winkel und ihrer

Hypotenusen einander gleich. Jede durch irgend einen Punkt e der AB mit EF parallel gezogene gerade Linie, wie nahe sie auch bey der EF liegen mag, begegnet also der Conchoide. So wie De kleiner wird, nimmt wegen der gegebenen $fe = b$ der Winkel efD oder der ihm gleiche Winkel DgC ab, die Dg, mithin auch die Dq wird immer größer und größer. Der Bogen BMm nähert sich der geraden Linie EF desto mehr, je weiter er fortgesezt wird, und sein Abstand von EF kann kleiner gemacht werden, als jede gegebene Linie q, wenn man $De < q$ nimmt, und die vorhin gezeigte Construction macht. Ebenso kann der Abstand des Bogens $AM'm'$ von der geraden Linie EF kleiner gemacht werden, als jede gegebene Linie q. Folglich ist die gerade Linie EF die Asymptote der Aeste BMm und $AM'm'$ der Conchoide (der oberen und unteren Conchoide).

In so fern zwischen einem Bogen einer krummen Linie und seiner Asymptote keine gerade Linie kann durch gezogen werden, hat die Asymptote einige Aehnlichkeit mit der Tangente. Sie unterscheiden sich aber darin von einander, daß leztere immer der krummen Linie wenigstens in einem Punkt (dem Berührungspunkt) begegnet, die erstere hingegen sich dem Bogen der krummen Linie, auf welchen sie sich beziehet, nur beständig nähert, ohne ihn jemals zu erreichen. Daher hat man sich hier auch des uneigentlichen Ausdruks bedient, die Asymptoten krummer Linien seyen Tangenten an einem unendlich entfernten Punkt derselben. So wie eine gerade Linie, welche einen Bogen einer krummen Linie berührt, der krummen Linie noch in mehreren Punkten begegnen und sie schneiden kann, kann auch eine gerade Linie, welche die Asymptote eines Bogens einer krummen Linie ist, der krummen Linie selbst in mehreren Punkten begegnen.

Für die krumme Linie Fig. 10. z. B. hat man die Gleichung

$$x^3 + xy^2 - 5x^2 + 3x - 4y + 5 = 0,$$

woraus man erhält $y = \frac{2}{x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{4 - 5x - 3x^2 + 5x^3 - x^4}$,

$$= \frac{2}{x} \pm \frac{1-x}{x}\sqrt{(4-x)(1+x)},$$

$$= \frac{2}{0} \pm \frac{2}{0} \text{ für } x = 0.$$

Der

Der Ausdruk von y ist also, wenn man das Subtractionszeichen gebraucht, mit x theilbar. Wirklich findet sich, wenn man den Ausdruk von y in einen Bruch verwandelt, dessen Nenner

$\frac{2}{x} \mp \frac{1}{x}\sqrt{4-5x-3x^2+5x^3-x^4}$ ist, und die gehörigen Reductionen macht,

$$y = \frac{5+3x-5x^2+x^3}{2 \mp \sqrt{4-5x-3x^2+5x^3-x^4}},$$

$= \frac{5}{2 \mp 2}$ für $x = 0$.

Der Abscisse $x = 0$ entspricht also die mögliche Ordinate $Am = \frac{5}{4}$, und der andere Werth von y ist unendlich. Eine durch den Anfangspunkt A der Abscissen auf AK senkrecht gezogene gerade Linie AB begegnet dem Ast CMS der krummen Linie nicht mehr, und ist eine Asymptote desselben. Der Bogen MES' aber schneidet die Asymptote in dem Punkt m.

Eben so findet sich für die krumme Linie Fig. 11., deren Gleichung in dem vorhergehenden §. vorkommt, daß die durch den Anfangspunkt A der Abscissen auf AK senkrecht gezogene gerade Linie AB der krummen Linie in dem Punkt m begegne, dessen Ordinate $Am = 1$ ist, und daß zugleich diese gerade Linie die Asymptote des Bogens MS sey.

§. 71. Die Asymptoten krummer Linien können also auch als diejenigen geraden Linien betrachtet werden, welchen sich als einer Gränze die Lagen der Tangenten desto mehr nähern, je weiter die Berührungspunkte hinaus rücken, ohne jemals diese Gränze zu erreichen. Auf diese Betrachtung gründet sich folgende Methode, die Lage der Asymptoten in denjenigen Fällen zu bestimmen, wo sie weder mit den Ordinaten der krummen Linie, noch mit der Axe der Abscissen parallel laufen. Es sey CDW (Fig 15.) die Asymptote des Bogens BMS, welche einem in dem Anfangspunkt A der Abscissen auf der Axe AK errichteten Perpendickel AD in D, und der Axe AK in C begegne. MT berühre die krumme Linie in dem Punkt M, und MP sey die dem Berührungspunkt entsprechende senkrechte Ordinate. Wenn nun die Tangente MT der AD in U, und der CK in T begegnet; so verhält sich

$$AU : AT = PM : PT,$$

oder $AU : y\frac{dx}{dy} - x = dy : dx$ (§. 73.),

und es ist $AT = y\,\frac{dx}{dy} - x$,

$$AU = y - x\,\frac{dy}{dx}.$$

Man wird also um die Lage der Asymptote CDW zu finden, die Gränzen AC, AD von AT, AU bestimmen müßen, welchen sich die lezteren bey der Fortsezung des Bogens BMS beständig nähern, ohne sie jemals zu erreichen.

Für die Hyperbel hat man z. B. wenn ihre halbe Queerare mit a, die halbe zugeordnete Are mit b bezeichnet, und die Abscissen x von einem der an gerechnet werden, die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

und es ist $y\,\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a + x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(a+x)}{y} = \frac{\frac{b}{a}(a+x)}{\sqrt{2ax+x^2}}.$$

Folglich ist $AT = \frac{2ax+x^2}{a+x} - x = \frac{ax}{a+x}$,

$$\text{und } AU = y - \frac{\frac{b}{a}(ax+x^2)}{\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{bx}{\sqrt{2ax+x^2}},$$

$$\text{oder } AT = \frac{a}{\frac{a}{x}+1},\quad AU = \frac{b}{\sqrt{\frac{2a}{x}+1}}.$$

Die Gränzen, welchen sich AT und AU bey der Vergrößerung von x beständig nähern, sind also beziehungsweise a und b. Und weil die Werthe von y beständig möglich sind, wie groß auch x genommen werden mag; so kann der Bogen MS so weit als man will fortgesezt werden. Man nehme hienach $AC = a$, $AD = b$, und ziehe die gerade Linie CDW; so ist diese eine Asymptote der Hyperbel.

Die Gleichung für die krumme Linie Fig. 16. (das Follum Cartesianum) zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ ist

$$x^3 - bxy + y^3 = 0,$$

aus welcher man erhält

$$3x^2 - by - bx\,\frac{dy}{dx} + 3y^2\,\frac{dy}{dx} = 0 \text{ (§. 42.)}.$$

Folglich ist, wenn man die gegebene Größe $b = 3a$ sezt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2},$$

und $y\frac{dx}{dy} - x = \frac{axy - y^3}{x^2 - ay} - x$,

$$= \frac{2axy - x^3 - y^3}{x^2 - ay},$$

oder $AT = -\frac{axy}{x^2 - ay}$, weil $x^3 + y^3 = bxy = 3axy$,

$$y - x\frac{dy}{dx} = y - \frac{x^3 - axy}{ax - y^2},$$

$$= \frac{2axy - x^3 - y^3}{ax - y^2},$$

oder $AU = -\frac{axy}{ax - y^2}$.

Um die Gränzen von AT und AU angeben zu können, sollte y durch x, oder x durch y ausgedrükt seyn. Da dieses hier nicht angeht, suche man beyde durch eine dritte veränderliche Größe z auszudrücken. Macht man $x = yz$; so verwandelt sich die Gleichung für die krumme Linie in folgende:

$y^3z^3 - by^2z + y^3 = 0$, welche mit y^3 theilbar ist, und

$yz^3 - bz + y = 0$ giebt.

Es ist also $y = \frac{bz}{1 + z^3} = \frac{3az}{1 + z^3}$,

und $x = \frac{3az^2}{1 + z^3}$.

Demnach werden y und x desto größer, je mehr sich z dem Werth -1 nähert. Ferner finden sich $AT = -\frac{3az^2}{2z^3 - 1}$,

und $AU = -\frac{3az}{z - 2}$.

Für $z = -1$ erhält man die Gränze von $AT = +a$,

und die Gränze von $AU = -a$.

Da die Gränze von AT positiv ist; so fällt der Punkt C, wie man in der 15ten Figur angenommen hat, auf die Verlängerung von PA über den Anfangspunkt A der Abscissen hinaus. Die Gränze von AU ist negativ, und daher fällt der Punkt D auf die Seite der negativen Ordinaten. Wenn man also $AC = AD = a$ nimmt, und durch C, D die gerade Linie $WCDW'$ zieht; so ist diese eine Asymptote der krummen Linie.

Man ziehe durch den Anfangspunkt A der Abscissen die gerade Linie BE auf CD, und durch den Punkt M der krummen Linie die MQ auf BE senkrecht, deren Verlängerung die AK in S schneide. Die verlängerte PM schneide die BE in N. Da $CA = CD$; so ist $AQ = QS$ und $PM = PS$, $AP = PN$. Mithin ist

$AP + PM = AP + PS = AS = AQ\sqrt{2}$,

$AP - PM = PN - PM = MN = MQ\sqrt{2}$,

und $2AP = (AQ + MQ)\sqrt{2}$,

$2PM = (AQ - MQ)\sqrt{2}$,

oder, wenn man $AQ = t$, $MQ = u$ sezt,

$$x = \frac{t+u}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{t-u}{\sqrt{2}}.$$

Sezt man diese Ausdrücke in die Gleichung $x^3 - bxy + y^3 = 0$; so findet man, wenn man $g = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ macht, die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Ordinaten AQ, QM

$$u^2 = \frac{gt^2 - t^3}{g+3t}; \quad u = \pm t\sqrt{\frac{g-t}{g+3t}}.$$

Die gerade Linie BE halbirt also alle mit CD parallele Chorden MM' dieser krummen Linie. Für positive Werthe von AQ darf t nicht größer als g oder als $\frac{b}{\sqrt{2}}$ seyn. Nimmt man $AB = \frac{b}{\sqrt{2}}$; so erstrekt sich die krumme Linie nicht über den Punkt B hinaus. Für negative Abscissen hat man $u^2 = \frac{gt^2 + t^3}{g-3t}$, und daher muß die negative Abscisse kleiner als $\frac{g}{3}$ oder kleiner $\frac{a}{\sqrt{2}}$, d. i. weil $AC = CD = a$ ist, kleiner als AE seyn. Jede durch irgend einen Punkt der AE mit CD parallel gezogene gerade Linie begegnet also beyderseits der krummen Linie. Für $t = \frac{g}{3}$ wird u unendlich, d. i. die gerade Linie WW' begegnet der krummen Linie nicht mehr, und sie ist eine Asymptote der zwey Aeste MAL, $M'AL'$, welche sich in dem Anfangspunkt A der Abscissen schneiden.

§. 72. Wenn in der §. 70. angenommenen Gleichung $y = P + Q(x-a)^n$ der Exponent eine positive Zahl ist; so verschwindet das Glied $Q(x-a)^n$ für $x-a$, und die der Abscisse $AC = a$ (Fig. 17. 18.) entsprechende Ordinate CB wird möglich. Man differentiire obige Gleichung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} + (x-a)^n \frac{dQ}{dx} + nQ(x-a)^{n-1},$$

und das lezte Glied verschwindet nicht mehr für $x = a$, wenn der Exponent n ein ächter Bruch ist. In diesem Fall wird also $\frac{dy}{dx}$ unendlich, wenn man $x = a$ macht. So lange aber

$x > a$ ist, behält das Glied $nQ(x-a)^{n-1}$ oder $\frac{nQ}{(x-a)^{1-n}}$ einen endlichen Werth, welcher desto größer wird, je näher die Ordinate PM an die Ordinate BC rükt. Der Winkel, welchen die Tangente mit der Axe der Abscissen macht, wird sich desto mehr dem Coordinatenwinkel nähern, je kleiner $x-a$ wird, und das zunächst dem Punkt B anliegende Stük BmM des Bogens der krummen Linie wird seine erhabene Seite gegen die gerade Linie CBE kehren. Endlich wird durch den Punkt B keine gerade Linie zwischen dem Bogen BM und der geraden Linie CBE können durch gezogen werden. Es sey, wenn es möglich wäre, BS eine solche gerade Linie; so wird man, wie klein auch die Winkel EBS (Fig. 17.) CBS (Fig. 18.) seyn mögen, an die krumme Linie BM eine Tangente mt mit der BS parallel (§. 67.), oder auch so ziehen können, daß sie mit der CBE einen spizeren Winkel, als die BS macht, weil $\frac{dy}{dx}$ durch die Verminderung von $x-a$ so groß gemacht werden kann als man will. Die an den Berührungspunkt m gezogene Chorde Bm wird zwischen BE und BS (Fig. 17.), oder zwischen BC und BS (Fig. 18.) fallen; folglich wird die BS nicht zwischen BE und dem Bogen BM (Fig 17.), oder zwischen BC und BM (Fig. 18.) durchgehen können. Die gerade Linie CBE wird also den Bogen BM in dem Punkt B berühren, und daher ist, wenn $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird, die Tangente mit den Ordinaten parallel. Ist der Coordinatenwinkel ein rechter; so steht die Tangente auf der Axe der Abscissen senkrecht, wenn $\frac{dy}{dx}$ unendlich ist. Hiemit stimmt der trigonometrische Ausdruk der Tangente des Winkels überein, welchen die berührende gerade Linie mit der Axe der Abscissen macht (§. 66.). Die trigonometrische Tangente dieses Winkels ist $= \frac{dy}{dx}$, und daher steht die berührende gerade Linie auf der Axe der Abscissen senkrecht, wenn $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird.

§. 73. Zur ferneren Erläuterung der bisher vorge-

tragenen Sätze mag folgende Gleichung dienen: $y = b + c\,(x-a)^r$.

Wenn der Exponent r eine negative Zahl ist; so wird y unendlich für $x = a$, und die krumme Linie hat eine mit den Ordinaten parallel laufende Asymptote, welche der Abscisse $x = a$ entspricht (§. 70.).

Der Exponent r sey ein ächter Bruch; so ist, wenn man differentiirt,

$\frac{dy}{dx} = rc\,(x-a)^{r-1} = \frac{rc}{(x-a)^{1-r}}$, und daher (§. 72.) die der Abscisse $x = a$ entsprechende Tangente mit den Ordinaten parallel, oder, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist, auf der Axe der Abscissen senkrecht. Die diesem Berührungspunkt entsprechende Ordinate ist $= b$.

Man setze den ächten Bruch $r = \frac{m}{n}$, und dieser sey auf seine einfachste Benennung gebracht, so daß m und n Primzahlen unter sich seyen. Es werden also m und n nicht zugleich gerade Zahlen seyn können, und man wird nur folgende drey Fälle zu unterscheiden haben.

1.) Der Nenner n sey eine gerade; mithin m eine ungerade Zahl. In diesem Fall darf $x-a$ nicht negativ werden, und daher liegt die krumme Linie ganz auf einerley Seite der durch den Endpunkt C (Fig. 19.) der Abscisse $AC = a$ mit den Ordinaten parallel gezogenen geraden Linie CBE, welche die krumme Linie in B berührt. Jedem Werth AP von x, welcher größer als AC oder a ist, entsprechen zwey Ordinaten PM, PM', und eine durch den Punkt B, für welchen $CB = b$ ist, mit AK parallel gezogene gerade Linie BL halbirt alle mit BE parallel gezogene Chorden MM' der krummen Linie in Q, weil $y - b = c\,(x-a)^{\frac{m}{n}} = \pm\sqrt[n]{(x-a)^m} = \begin{cases} QM \\ QM' \end{cases}$.

Ferner ist $\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)c(x-a)^{r-2} = -\frac{r(1-r)c}{(x-a)^{2-r}}$,

$= -\frac{m(n-m)c}{n^2(x-a)^{\frac{2n-m}{n}}} = \mp\frac{m(n-m)c}{n^2}\sqrt[n]{\frac{1}{(x-a)^{2n-m}}}$,

wo das obere Zeichen auf den oberhalb BQ liegenden Bogen,

das untere auf den unterhalb BQ liegenden sich bezieht, c mag positiv oder negativ seyn, weil bey einem negativen Werth von c blos PM und PM' sich mit einander verwechseln. Der Bogen BM kehrt also seine hole, der Bogen BM' aber seine erhabene Seite gegen die als ausserhalb der krummen Linie liegend angenommene Axe AK (§. 65. n. 5.). Weil aber der Bogen MBM' ganz gegen die Tangente CBE erhaben ist und auf einerley Seite derselben liegt; so ist der Punkt B kein Wendungspunkt.

2.) Der Zähler m sey eine gerade, mithin der Nenner n eine ungerade Zahl; so ist $(x-a)^m$ beständig positiv. Die Ordinaten sind also auf beyden Seiten des Punkts C (Fig. 20.), für welchen $x = AC = a$ ist, möglich und positiv, wenn c positiv ist. Und da in diesem Fall $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf beyden Seiten von C negativ bleibt; so kehren die zwey Aeste BM, BM' ihre hole Seite gegen AK (§. 65.), und sie haben in dem Punkt B eine gemeinschaftliche Tangente CE, gegen welche sie erhaben sind. Dieser Punkt B heißt eine Spitze. Wenn c negativ ist; so bekommt die Spitze eine umgekehrte Lage.

3.) Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{m}{n}$ seyen ungerade Zahlen; so ist die irrationelle Größe $c(x-a)^{\frac{m}{n}}$ für positive und negative Werthe von $x-a$ möglich, und hat mit $x-a$ einerley Zeichen, wenn c positiv ist. Die Aeste BM, BM' (Fig. 21.) liegen also auf verschiedenen Seiten ihrer gemeinschaftlichen Tangente CBE. Das $\frac{d^2y}{dx^2}$ ändert mit $x-a$ seine Zeichen, und der Bogen BM kehrt, wenn c positiv ist, seine hole, der Bogen BM' aber seine erhabene Seite gegen AK. Umgekehrt verhält es sich, wenn c negativ ist. Demnach ist der Punkt B ein Wendungspunkt, in welchem die CBE die krumme Linie berührt. Für diesen Punkt wird so wohl $\frac{dy}{dx}$ als $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich, und daher kann eine krumme Linie einen Wendungspunkt haben, es mag $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ oder unendlich seyn.

Die in der 20sten Figur abgebildete Spitze heißt eine Spitze der ersten Art. Wenn aber zwey Aeste MA, $M'A$ (Fig. 22.) in dem Punkt A über welche hinaus sie sich nicht mehr erstrecken, eine gemeinschaftliche Tangente AK haben, und beyde ihre hole Seite nach einerley Richtung kehren; so heißt der Punkt A eine Spitze der zweyten Art. Sey z. B.

$(ay - x^2)^2 = \frac{x^5}{a}$; so ist

$$y = \frac{x^2}{a} \mp \frac{x^2}{a}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

und daher y unmöglich für negative Werthe von x, so daß die krumme Linie in dem Anfangspunkt A der Abscissen anfängt. So lange als x kleiner ist als a sind beyde Werthe PM und PM' von y positiv, und weil

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a} \pm \frac{5}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$; so werden beyde Werthe von $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$, und die Tangente an dem Punkt A fällt mit der Axe AK der Abscissen zusammen. Sodenn ist

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{a} \pm \frac{15}{4a}\sqrt{\frac{x}{a}}$ für beyde Aeste eine positive Größe, so lange als $x < \frac{64}{225}a$ ist. Folglich kehren beyde Aeste ihre erhabene Seite gegen die Tangente AK (§. 65.), und der Punkt A ist eine Spitze der zweyten Art. Der Bogen AM ist beständig gegen AK erhaben, der Bogen AM' aber hat für $x = \frac{64}{225}a$ einen Wendungspunkt, von welchem an er seine erhabene Seite gegen den Bogen AM kehrt.

§. 74. Für die krumme Linie BMM' (Fig. 23. 24.) ist eine Gleichung zwischen $AP = x$, $PM = y$ gegeben. Man soll das Differential des als eine Function der Abscissen x betrachteten Bogens BM oder s der krummen Linie finden. Wenn die Ordinaten von M bis M' beständig wachsen, und

1.) Der Bogen MM' ganz gegen die Axe AK hol ist (Fig. 23.); so ist, wenn man an die Endpunkte M, M' dieses Bogens die Tangenten MT, $M'T'$ zieht (§. 63.), welche den Verlängerungen der Ordinaten in T und T' begegnen, und sich in S schneiden, der Winkel $TM'T' > STM'$, und

daher (I, 19.) $ST \rangle SM'$, $\left.\begin{matrix} MS+ST \\ MT \end{matrix}\right\} \rangle MS+SM'$, und um so mehr (Archim. über Kugel und Cylinder. I. B. Ax. 2.) $\rangle$ Bogen MM. Auf der anderen Seite ist $M'T' \langle$ Chorde MM' (I, 19.), und (vermöge des angeführten Axioms) um so mehr $\langle$ Bogen MM'.

Folglich ist Bogen $\left.\begin{matrix} MM' \\ \Delta s \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} PP' \\ \Delta x \end{matrix}\right\} \langle MT : PP'$,
$\rangle M'T' : PP'$.

Das veränderliche Verhältniß von $\Delta s : \Delta x$ ist also in diesem Fall beständig kleiner als das durch AP oder x gegebene Verhältniß von $MT : PP'$. Aber man kann Δx und zugleich Δs so klein nehmen, daß das Verhältniß von $\Delta s : \Delta x$ größer wird als $MT-q : PP'$, wie klein auch q seyn mag. Denn zieht man durch T die Parallele TN mit $M'T'$, welche der verlängerten Ordinate PM in N begegnet; so ist (I, 34.) $M'T' = NT$, und, wenn $MT-q \equiv NT$, das verlangte schon geschehen. Ist aber $MT-q \rangle NT$; so wird ein aus T als Mittelpunkt mit einem Halbmesser $= MT-q$ beschriebener Kreis die MN zwischen M und N schneiden. Es geschehe in O, und es mit der TO parallel eine Tangente mt an den Bogen MM' gezogen (§. 67.); so wird der Berührungspunkt m zwischen M und M' fallen, und eine durch m mit der Ordinate PM parallel gezogene gerade Linie qmp, welche der TO in q begegnet, wird den gesuchten Werth Pp von Δx bestimmen. Denn es ist vermöge des bewiesenen

$$\left.\begin{matrix} \text{Bogen } Mm : Pp \\ \Delta s : \Delta x \end{matrix}\right\} \rangle \left\{\begin{matrix} mt \\ Oq \end{matrix}\right\} : Pp,$$
$$\rangle OT : PP',$$
$$\rangle MT-q : PP' \text{ (Constr.)}.$$

Da nun $\Delta s : \Delta x \langle MT : PP'$, aber durch die Verminderung von Δx größer gemacht werden kann, als $MT-q : PP'$, wie klein auch q seyn mag; so ist (§. 6.)

$$ds : dx = MT : PP'.$$

Wenn 2.) der Bogen MM' gegen die Axe AK erhaben ist (Fig. 24.); so seyen wiederum an die Endpunkte M, M' dieses Bogens die Tangenten MT, $M'T'$ gezogen, welche

der Ordinate $P'M'$ in T, und der wo nöthig verlängerten Ordinate MP in T begegnen, und sich in S schneiden. Alsdenn ist $MT <$ Chorde MM', und um so mehr $<$ Bogen MM'. Auf der anderen Seite ist

$$\left.\begin{matrix} ST' \\ M'T' \end{matrix}\right\} > SM, ST' + SM' > MS + M'S,$$ und um so mehr

$>$ Bogen MM'.

Folglich ist beständig $$\left.\begin{matrix} \text{Bogen } MM' : PP' \\ \Delta s : \Delta x \end{matrix}\right\} > MT : PP',$$

$$< M'T' : PP'.$$

Aber man kann Δx und zugleich Δs so klein nehmen, daß das Verhältniß von $\Delta s : \Delta x$ kleiner wird als das Verhältniß von $MT + q : PP'$, wie klein auch q seyn mag. Denn zieht man durch T die Parallele TN mit $M'T'$, welche der wo nöthig verlängerten MP in N begegnet; so ist $TN = M'T'$, und daher, wenn $MT + q \geqq TN$, das verlangte schon geschehen. Ist aber $MT + q < TN$; so wird ein aus T als Mittelpunkt mit einem Halbmesser $= MT + q$ beschriebener Kreis die MN in einem Punkt O zwischen M und N schneiden, und eine mit der TO nach §. 67. parallel gezogene Tangente mt des Bogens MM' wird diesen Bogen zwischen M und M' in m berühren. Man ziehe durch den Berührungspunkt m die Parallele mp mit PM, welche der TO in q, der AP' in p begegne; so wird Pp der gesuchte Werth von Δx seyn. Denn es ist vermöge des bewiesenen

$$\left.\begin{matrix} \text{Bogen } Mm : Pp \\ \Delta s : \Delta x \end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix} mt \\ Oq \end{matrix}\right\} : Pp,$$

$$< OT : PP',$$

$$< MT + q : PP' \text{ (Constr.)}.$$

Da nun $\Delta s : \Delta x > MT : PP'$, aber durch die Verminderung von Δx kleiner gemacht werden kann als $MT + q : PP'$, wie klein auch q seyn mag; so ist (§. 6.)

$$ds : dx = MT : PP'.$$

Wenn die Ordinaten abnehmen, indem die Abscissen wachsen; so denke man sich die Axe der Abscissen auf der anderen Seite der krummen Linien BMM' (Fig. 23. 24.) mit der Axe AK parallel gezogen, und die Ordinaten bis

an die erstere Axe verlängert; so hat man in beyden Fällen abnehmende Ordinaten, indem die Abscissen wachsen, und die 23ste Figur gehört zu dem Fall, wo die krumme Linie gegen die Axe erhaben, die 24ste aber, wo die krumme Linie gegen die Axe hol ist.

Man ziehe durch den Punkt M (Fig. 23. 24.) die Parallele MR mit PP'; so verhält sich vermöge §. 64.

$$TR : MR = dy : dx,$$
$$\overline{TR}^2 : \overline{MR}^2 = \overline{dy}^2 : \overline{dx}^2,$$

und, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist,

$$\left.\begin{matrix}\overline{MR}^2 + \overline{TR}^2 \\ \overline{MT}^2\end{matrix}\right\} = \overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 : dx^2,$$
$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : 1,$$
$$MT : MR = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} : 1.$$

Folglich ist $ds : dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} : 1,$

$$\text{oder } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Eben dieses Differential könnte auch so gefunden werden. Wenn die geraden Linien MT, $M'T'$ (Fig. 23. 24.) dem Bogen MM' an seinen Endpunkten M, M' berühren, und der Coordinatenwinkel ein rechter ist; so ist, wie man so eben gefunden hat, $\frac{MT}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ = einer gegebenen Function fx von x,

und $\frac{M'T'}{\Delta x} = f(x + \Delta x)$.

Es ist also, weil in Fig. 23. der Bogen $MM' < MT$, und $> M'T'$,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} < fx,$$
$$> f(x + \Delta x);$$

folglich $\frac{ds}{dx} = fx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

In Beziehung auf die 24 Figur ist der Bogen $MM' > MT$, und $< M'T'$, mithin $\frac{\Delta s}{\Delta x} > fx$, $< f(x+\Delta x)$;

folglich wiederum $\frac{ds}{dx} = fx = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

§. 75. Wenn man an eine krumme Linie BMM' (Fig. 23. 24.) eine Tangente MT, durch den Berührungspunkt M eine Parallele MR mit der Axe AK der Abscissen, und durch einen beliebigen Punkt T der Tangente eine Parallele TP' mit den Ordinaten PM zieht, welche der MR in R begegnet; so verhalten sich die Seiten MR, RT, TM des Dreyeks MTR beziehungsweise wie die Differentiale dx, dy, ds der Abscisse AP, der Ordinate PM, und des Bogens BM.

Denn es verhält sich $dx : dy = \left\{\begin{matrix} PP' \\ MR \end{matrix}\right\} : RT$ (§. 64.)

und $dx : ds = \left\{\begin{matrix} PP' \\ MR \end{matrix}\right\} : MT$ (§. 74.).

Hieraus ergeben sich folgende einfachere Ausdrücke der Sinus der Winkel, welche die Tangente mit den Ordinaten und der Axe der Abscissen macht, wenn der Coordinatenwinkel wie gewöhnlich ein rechter ist (Fig. 7).

Es ist $\left.\begin{matrix} \text{Sin. } PMT \\ \text{Sin. } ANM \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ (§. 66.),

$= \frac{dx}{ds}$ (§. 74.),

$\left.\begin{matrix} \text{Sin. } PTM \\ \text{Sin. } PMN \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}$ (§. 66.),

$= \frac{dy}{ds}$ (§. 74.).

Die Normallinie MN ist $= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (§. 66.),

$= y\frac{ds}{dx}$.

§. 76. Die umgekehrte Aufgabe, aus dem Gesez, nach welchem die Subtangente, Subnormallinie, Normallinie u. s. w. von den Abscissen oder Ordinaten abhängen, die Gleichung für die krumme Linie zu finden, welche man die umgekehrte Methode der Tangenten nennt, erfordert Integralrechnung. Es sey z. B. die krumme Linie zu finden, deren Subtangente beständig der doppelten Abscisse gleich ist. Weil die Subtangente unter der Voraussetzung eines rechten Coordinatenwinkels allgemein $= y \frac{dx}{dy}$ ist (§. 66.);

so muß hier $y \frac{dx}{dy} = 2x$,

$$\frac{dx}{x} = 2\frac{dy}{y},$$

folglich $\text{Lg.}\, x + \text{Lg.}\, C = 2\,\text{Lg.}\, y$ (§. 29. n. 4.),

$$\text{Lg.}\, Cx = \text{Lg.}\, y^2,$$

$$Cx = y^2,$$

und daher die krumme Linie eine Parabel seyn, deren Parameter C ist.

Es werde eine krumme Linie gesucht, deren Subnormallinie einer gegebenen Größe a gleich sey. Da die Subnormallinie $= y \frac{dy}{dx}$ (§. 66.); so wird man haben

$$ydy = adx,$$
$$2ydy = 2adx,$$
$$y^2 = C + 2ax.$$

Die gesuchte krumme Linie ist also eine Parabel, deren Parameter $= 2a$ ist. Sollen die Abscissen von dem Scheitel der Parabel an gerechnet werden; so muß $y = 0$ seyn für $x = 0$, und daher $C = 0$. Die Gleichung ist alsdenn $y^2 = 2ax$.

Man sucht die krumme Linie, deren Subtangente einer gegebenen Größe a gleich sey.

In diesem Fall muß seyn $y \frac{dx}{dy} = a$,

$$dx = a\frac{dy}{y},$$

$$C + x = a\,\text{Lg.}\, y,$$

oder, wenn man $C = a\,\text{Lg.}\, c$ sezt,

$$x = a\,\text{Lg.}\, y - a\,\text{Lg.}\, c = a\,\text{Lg.}\, \frac{y}{c}.$$

Diese krumme Linie heißt die logarithmische Linie. Die Abscissen x sind die Logarithmen der Zahlen $\frac{y}{c}$ in einem System, dessen Modulus die gegebene Zahl a, und dessen Basis c ist (§. 29.).

§. 77. Indessen giebt es besondere Fälle, in welchen ähnliche Aufgaben blos mittelst der Differentialrechnung können aufgelöst werden. Diese Fälle sind diejenigen, wo nur zwischen den Bestimmungsstücken der Berührungen selbst gewiße gegebene Beziehungen statt finden sollen, ohne daß sich diese auf die Coordinaten x und y beziehen. Um dieses durch ein Beyspiel zu erläutern, seyen auf den Schenkeln AB, BC (Fig. 25.) eines gegebenen Winkels die Punkte A und C gegeben, und eine gerade Linie TS bewege sich so, daß beständig $BT : CS = AB : BC$. Man sucht die krumme Linie AMC, welche die TS in jeder ihrer Lagen berührt.

Man ziehe an den Berührungspunkt M die Ordinate MP mit BC parallel, setze $AB = a$, $BC = b$, $BP = x$, $PM = y$; so ist (§. 60.)

$$PT = -y\frac{dx}{dy}, \text{ und daher } BT = x - y\frac{dx}{dy}.$$

Sodenn verhält sich $\left.\begin{matrix} PT : PM \\ dx : -dy \end{matrix}\right\} = BT : BS;$

$$\text{folglich ist } BS = -x\frac{dy}{dx} + y,$$

$$\text{und } CS = b + x\frac{dy}{dx} - y.$$

Es soll aber seyn

$$BT : CS = AB : BC,$$

d. i. $x - y\frac{dx}{dy} : b - y + x\frac{dy}{dx} = a : b;$

folglich $a(b-y) + ax\frac{dy}{dx} = bx - by\frac{dx}{dy}$,

$$ab - ay - bx + ax\frac{dy}{dx} + by\frac{dx}{dy} = 0,$$

oder I.) $(ab - ay - bx)\frac{dy}{dx} + ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + by = 0.$

Man differentiire diese Gleichung, indem man y als eine Function von x betrachtet; so erhält man

$$\left(-a\frac{dy}{dx} - b\right)\frac{dy}{dx} + (ab - ay - bx)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ a\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2ax\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} = 0,$$

oder $(ab - ay - bx)\frac{d^2y}{dx^2} + 2ax\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

Diese Gleichung ist also mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ theilbar, und es muß seyn

2.) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, oder auch

3.) $ab - ay - bx + 2ax\frac{dy}{dx} = 0.$

Verbindet man die leztere Gleichung mit der Gleichung n. 1.; so kann man $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, und eine Gleichung zwischen x und y erhalten, in welcher keine Differentiale mehr vorkommen.

Multiplicirt man nemlich die leztere Gleichung mit $\frac{dy}{dx}$, und zieht von ihr die Gleichung n. 1. ab; so kommt

$$ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - by = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{by}{ax}}.$$

Es ist aber vermöge der vorhergehenden Gleichung n. 3.

$$2ax\frac{dy}{dx} = ay + bx - ab;$$

folglich, wenn man den so eben gefundenen Werth von $\frac{dy}{dx}$ subſtituirt,

$2ax\sqrt{\frac{by}{ax}} = ay + bx - ab$ die Gleichung für die gesuchte krumme Linie, welche sich auf folgende einfachere Form bringen läßt

$$\left(\frac{b}{a}x + b - y\right)^2 = \frac{4b^2x}{a}.$$

Die gesuchte krumme Linie ist eine Parabel, welche so kann verzeichnet werden. Man vollende das Parallelogramm $ABCD$, ziehe die Diagonale BD, und durch C die Parallele KCQ mit BD. Die verlängerte Ordinate PM begegne der BD in N, und der CQ in Q.

Es verhält sich $\left.\begin{matrix} CP \\ x \end{matrix}\right\} : PN = AB : \left\{\begin{matrix} AD \\ BC \end{matrix}\right\}$,

$$= a : b;$$

folglich ist $PN = \frac{bx}{a}$,

$$PQ = PN + NR = PN + BC = \frac{bx}{a} + b,$$

$$QM = PQ - PM = \frac{bx}{a} + b - y.$$

Da nun vermöge der gefundenen Gleichung

$$\left(\frac{bx}{a} + b - y\right)^2 = 4\frac{b^2x}{a};$$

so ist $\overline{QM}^2 = 4.\ \frac{\overline{BC}^2}{AB}\ .\ BP$,

$$= 4.\ \frac{\overline{BC}^2}{BD}\ .\ CQ,$$ weil $BP : AB :: \left\{\begin{matrix} BN \\ CQ \end{matrix}\right\} : BD$,

und daher die krumme Linie eine Parabel, welche die gerade Linie CQ zu einem ihrer Durchmesser hat, dessen Parameter das Vierfache der dritten geometrischen Proportionallinie zu BD und BC ist. Man nehme auf der wo nöthig verlängerten Diagonale DB von D an die $DH = DA$. und ziehe durch H die Parallele GH mit AB; so wird diese auf der wo nöthig verlängerten CB die CG gleich dem vierten Theil des Parameters CQ abschneiden, weil

$$BD : \left\{\begin{matrix} DH \\ AD \\ BC \end{matrix}\right\} = BC : CG.$$

Da die Ordinate QM mit BC parallel ist (Constr.); so berührt die BC die Parabel in C, und es ist, wenn man den Winkel $GCF =$ dem Winkel GCK, und $CF = CG$ macht, der Punkt F der Brennpunkt der Parabel. Zieht man noch durch F die Parallele et mit CQ, welche der CB in t begegnet, und halbirt Ft in a; so ist dieser Punkt der Scheitel der Parabel, und $4Fa$ der Parameter der Axe.

Weil CQ mit BD parallel ist (Constr.); so ist auch BD ein Durchmesser der Parabel, und weil die Diagonale CA von der BD in O halbirt wird; so ist CA mit den Ordinaten des Durchmessers BD parallel. Da nun die BC die Parabel in C berührt; so berührt auch die AB eben diese Parabel in A. Die Parabel könnte also auch so gefunden werden. Man ziehe die Diagonalen AC, BD, welche sich halbieren in O. Man halbiere BO in E; so ist E der Scheitel des Durchmessers BD, und die dritte geometrische Proportionallinie zu OE und AO ist der Parameter dieses Durchmessers.

Folgende Aufgabe kann auf ähnliche Art aufgelöst werden. Eine gerade Linie ST (Fig. 26.) von gegebener Größe bewegt sich so, daß ihre Endpunkte

punkte S, T beständig auf den sich rechtwinklicht in C schneidenden geraden Linien BB', AA' liegen. Man sucht die krumme Linie, welche die ST in jeder ihrer Lagen berührt.

Man ziehe MP senkrecht auf AA', und setze $ST = a$, $CP = x$, $PM = y$, den Bogen $BM = s$; so verhält sich (§. 75.)

$$\left.\begin{matrix} PM \\ y \end{matrix}\right\} : MT = -dy : ds,$$

$$\left.\begin{matrix} CP \\ x \end{matrix}\right\} : MS = dx : ds.$$

Also ist $MT = -y\frac{ds}{dy}$,

$$MS = x\frac{ds}{dx},$$

und 1.) $$\left.\begin{matrix} MS + MT \\ ST \end{matrix}\right\} = x\frac{ds}{dx} - y\frac{ds}{dy} = a,$$

oder $$x\frac{dy}{dx}\frac{ds}{dx} - y\frac{ds}{dx} - a\frac{dy}{dx} = 0.$$

Man differentiire diese Gleichung; so erhält man

$$\frac{dy}{dx}\frac{ds}{dx} + x\frac{ds}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\frac{d^2s}{dx^2}$$

$$- \frac{dy}{dx}\frac{ds}{dx} - y\frac{d^2s}{dx^2} - a\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

oder $$\left(x\frac{ds}{dx} - a\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\frac{d^2s}{dx^2} = 0.$$

Es ist aber (§. 74.)

$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, und, wenn man differentiirt,

$$2\frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dx^2};$$

folglich, wenn man diesen Ausdruk in obiger Gleichung substituirt,

$$\left(x\frac{ds}{dx} - a\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die ganze Gleichung ist jezt mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ theilbar, und sie zerfällt in die Gleichungen

2.) $$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

3.) $$x\frac{ds}{dx} - a + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\frac{dy}{ds} = 0,$$

Aus der Gleichung n. 1. folgt aber $x\frac{dy}{dx} - y = a\frac{dy}{ds}$; folglich ist vermöge n. 3.

$$x\frac{ds}{dx} - a + a\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 - a\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \text{ und daher}$$

$$x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 - a = 0, \text{ weil } \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Also ist $\frac{ds}{dx} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$,

$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ oder $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$, woraus man erhält

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Da die Ordinate PM oder y abnimmt, wenn die Abscisse CP oder x wächst; so muß in dem Ausdruk von $\frac{dy}{dx}$ das Subtractionszeichen gebraucht werden, und man erhält mittelst des obigen für $\frac{ds}{dx}$ gegebenen Ausdruks $\frac{ds}{dy} = -\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}$. Diese Werthe von $\frac{ds}{dx}$ und $\frac{ds}{dy}$ in die Gleichung n. 1. gesezt geben, weil $-y\frac{ds}{dy}$ positiv wird,

$$a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \frac{a^{\frac{1}{3}}y}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}} = a,$$

$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$, welches die Gleichung für die gesuchte krumme Linie ist.

Nimmt man $CA = CB = CA' = CB' = a$; so geht die krumme Linie durch die Punkte A, B, A', B', an deren jedem zwey gleiche und ähnliche Aeste der krummen Linie zusammenstoßen, und eine Spitze bilden.

Aus obiger Gleichung für die krumme Linie folgt, wenn man sie differentiirt,

$$\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},$$

$\frac{dx}{dy} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$, und die Subtangente $y\frac{dx}{dy}$ wird $= -y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, welche also auf die Verlängerung der Abscisse CP fällt (§. 66. pag. 136.). Hie-

nach ist $CT = x + y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, und $\overline{CT}^3 = a^2x = \overline{AC}^2 \times CP$. Und weil

$$PT : PM = CT : CS,$$

$$y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} : y = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} : CS;$$

so ist $CS = a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, $\overline{CS}^3 = a^2y = \overline{AC}^2 \times PM$.

Folglich verhält sich $\overline{CT}^3 : \overline{CS}^3 = CP : PM$.

Da $\overline{CT}^3 = \overline{AC}^2 \times CP$; so verhält sich

$$CP : CT = \overline{CT}^2 : \overline{AC}^2.$$

Aber $MS : CP = \left\{\begin{matrix} ST \\ AC \end{matrix}\right\} : CT$;

folglich $MS : CT = CT : \left\{\begin{matrix} AC \\ ST \end{matrix}\right\}$.

Eben so findet sich, weil $\overline{CS}^3 = \overline{AC}^2 \times PM$,

oder $PM : CS = \overline{CS}^2 : \overline{AC}^2$,

und $MT : PM = \left\{\begin{matrix} ST \\ AC \end{matrix}\right\} : CS$,

$$MT : CS = CS : \left\{\begin{matrix} AC \\ ST \end{matrix}\right\}.$$

Mithin kann man für jede Lage der ST den Berührungspunkt M geometrisch bestimmen.

§. 78. Wir wollen nun die andere der zwey Gleichungen betrachten, in welche man die durch das Differentiiren der Bedingungsgleichung erhaltene Gleichung zerfällt hat, und welche $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist. Aus dieser erhält man durch das Integriren $\frac{dy}{dx} =$ einer constanten Größe A. In Beziehung auf die erste der in dem vorhergehenden §. aufgelösten Aufgaben ist die Bedingungsgleichung

$(ab - ay - bx)\frac{dy}{dx} + ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + by = 0$; folglich wird, wenn man $\frac{dy}{dx} = A$ macht,

$$(ab - ay - bx)A + aA^2x + by = 0,$$

oder, wenn man in Beziehung auf den in der 25sten Figur angenommenen Fall $\frac{dy}{dx}$ negativ, und $= -A$ macht,

$y = \frac{Aab}{b+Aa} - Ax$, welche Gleichung zu einer geraden Linie gehört.

Nimmt man an, TS sey diese gerade Linie; so wird für $x = 0$, d. i. in dem Punkt B die Ordinate $y = \frac{Aab}{b+Aa} = BS$. Für $y = 0$ wird $x = \frac{ab}{b+Aa} = BT$. Also werden die Abschnitte $CS = \frac{b^2}{b+Aa}$, $AT = \frac{Aa^2}{b+Aa}$, und es verhält sich, wie es nach den Bedingungen der Aufgabe seyn soll, $B\Gamma : CS = AB : BC$.

Eben diese Gleichung erhält man auch so. Weil $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; so ist (§. 16.)

$y = Cx + C'$, wo C, C' constante Größen sind. Für $x = 0$ ist $y = C'$, und $\frac{dy}{dx} = C$. Folglich muß, wenn man diese Werthe in die Bedingungsgleichung sezt,

$(ab - aC')\,C + bC' = 0$, und $C' = -\frac{abC}{b-aC}$ seyn. Die Gleichung zwischen x und y wird also folgende $y = Cx - \frac{abC}{b-aC}$, welche mit der vorhergehenden übereinstimmt, wenn man die willkührliche constante Größe $C = -A$ macht. Diese Gleichung gehört also zu der berührenden geraden Linie selbst, und sie zeigt, wie für jeden gegebenen Werth von BP oder x, und für jeden gegebenen Winkel BST, dessen Tangente $= A$ ist, der dazu gehörige Werth von y, mithin der Berührungspunkt M gefunden werden könne. Nimmt man die constante Größe C positiv; so fällt der Berührungspunkt auf den über A hinaus verlängerten Bogen Am der Parabel, der Punkt T fällt auf die Verlängerung von BA, und der Punkt S auf die über B hinaus verlängerte CB. Zugleich sieht man, daß, weil der geometrische Ort aller Berührungspunkte gesucht wurde, nur die Parabel die vorgelegte Frage in dem Sinn ihrer Aussage beantwortet. Ebenso verhält es sich mit der zweyten Aufgabe des vorhergehenden §. Die ferneren Untersuchungen über den Ursprung dieser zwey verschiedenen Gleichungen gehören in die Integralrechnung.

Sechstes Capitel.

Von den Krümmungskreisen und Evoluten.

§. 79. Wenn zwey krumme Linien MM, Mm' (Fig. 27.) einander in einem Punkt M so treffen, daß dieselbe gerade Linie TMt sie in diesem Punkt berührt: so sagt man, die krummen Linien selbst berühren einander in diesem Punkt M. Jeder durch einen Punkt M einer krummen Linie beschriebener Kreis, dessen Mittelpunkt C auf der an den Punkt M gezogenen Normallinie MN liegt, berührt also die krumme Linie in M, und die Normallinie MN ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche die krumme Linie in M berühren. Da nun der Halbmesser des berührenden Kreises unbestimmt bleibt, so lange von einer Berührung überhaupt die Rede ist; so fragt es sich, wie groß der Halbmesser des berührenden Kreises genommen werden müße, damit dieser Kreis mit der krummen Linie an dem Punkt M eine innigere Berührung habe, als jeder andere berührende Kreis, und ob es nicht möglich sey, den Halbmesser des berührenden Kreises so zu bestimmen, daß zwischen dem Bogen der krummen Linie und dem Bogen dieses Kreises kein anderer Kreisbogen könne durch gezogen werden, so wie man an einen Bogen einer krummen Linie eine gerade Linie so ziehen kann, daß zwischen dem Bogen der krummen Linie und der geraden Linie keine andere gerade Linie durchgeht (§. 64.).

Um dieses zu untersuchen sey APP' die Axe der Abscissen der krummen Linie BMM', auf welcher die Ordinaten MP senkrecht seyen, und A sey der Anfangspunkt der Abscissen. Aus des berührenden Kreises Mittelpunkt C seyen CD, CQ auf die Axe der Abscissen und auf die dem Berührungspunkt entsprechende Ordinate beziehungsweise senkrecht gezogen; so ist, wenn man $AD = a$, $CD = b$, $CM = c$ und eine beliebige auf die Axe AP bezogene Ordinate $P'm'$ des Kreises, welche der wo nöthig verlängerten CQ in q begegnet, $= u$ sezt,

$$\left\{\frac{\overline{m'q}^2}{(P'm' - CD)^2}\right\} + \left\{\frac{\overline{Cq}^2}{(AD - AP')^2}\right\} = \overline{Cm}^2,$$

oder 1.) $(u-b)^2 + (a-x)^2 = c^2$, wenn man eine beliebige von A an gerechnete Abscisse $= x$ sezt.

Ferner verhält sich nach §. 75. und 66.

$$\left.\begin{matrix}Cm\\c\end{matrix}\right\} : CQ = MN : PN = y\,\frac{ds}{dx} : y\,\frac{dy}{dx},$$

$$= ds : dy,$$

und $$\left.\begin{matrix}CM\\c\end{matrix}\right\} : MQ = MN : PM = y\,\frac{ds}{dx} : y,$$

$$= ds : dx.$$

Folglich ist $CQ = c\,\frac{dy}{ds}$,

$$MQ = c\,\frac{dx}{ds},$$

und daher 2.) $$\left.\begin{matrix}AD\\a\end{matrix}\right\} = AP + PD = x + c\,\frac{dy}{ds},$$

3.) $$\left.\begin{matrix}CD\\b\end{matrix}\right\} = PQ = PM - MQ = y - c\,\frac{dx}{ds}.$$

Diese zwey Gleichungen bestimmen den Mittelpunkt C eines berührenden Kreises, wenn sein Halbmesser c gegeben ist.

Für die bestimmte Abscisse $x = AP$ wird nun seyn die Ordinate u des Kreises $= PM = y$, weil vermöge der Construction der Kreis durch den Punkt M der krummen Linie geht. Und weil der Kreis mit der krummen Linie an eben diesem Punkt eine gemeinschaftliche Tangente hat; so ist der Winkel $P\Gamma M$ für beyde derselbe, und daher (§. 60.)

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$, wenn man $x = AP$ macht.

Wenn aber die Abscisse AP um PP' oder Δx wächst; so wird nach dem Taylorischen Saz

$$P'M' = y + \frac{\Delta x}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \&c.$$

und $$P'm' = u + \frac{\Delta x}{1}\frac{du}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3} + \&c.$$

Folglich werden für jeden Kreis, welcher die krumme Linie in M berührt, die zwey ersten Glieder dieser Reihen einander gleich seyn. Da man nun den Halbmesser

c des berührenden Kreises nach Belieben nehmen kann, so wird man ihn, wenn anders für den gegebenen Punkt M der krummen Linie $\frac{d^2y}{dx^2}$ möglich ist, so bestimmen können, daß für $x = AP$ auch $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}$ wird. Denn es ist, wenn man die Gleichung n. 1. differentiirt,

$$2(u-b)\frac{du}{dx} - 2(a-x) = 0,$$ und, wenn man noch einmal differentiirt,

$$(u-b)\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right) + 1 = 0,$$

oder $(u-b)\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 0$, (§. 74. und weil $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$).

Es soll aber $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ werden; folglich muß seyn

4.) $u - b = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$ für $x = AP$.

Wenn also die krumme Linie gegeben ist; so ist für jeden gegebenen Punkt M derselben die Größe $u - b$ oder die Hälfte MQ der durch den Berührungspunkt M gehenden, mit den Ordinaten der krummen Linie parallel laufenden Chorde MK des Kreises gegeben (vorausgesezt, daß die in dem Ausdruk von $u - b$ vorkommende Differentiale an dem gegebenen Punkt möglich seyen), welcher so beschaffen ist, daß die drey ersten Glieder der für $P'M'$ und $P'm'$ gegebenen Reihen einander gleich werden. Folglich ist dieser berührende Kreis, weil sein Mittelpunkt auf der Normallinie MN liegen muß, gegeben, und sein Halbmesser bekommt einen bestimmten Werth.

Es verhält sich nemlich $MQ : CM = PM : PN$

$$= y : y\frac{ds}{dx} \text{ (§. 75.)},$$

$$= 1 : \frac{ds}{dx},$$

und daher ist, wenn man $MQ = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$ macht, und dieses Kreises Halbmesser mit r bezeichnet,

$$5.)\ r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{-\frac{d^2y}{dx^4}}.$$

Für jeden anderen Kreis, welcher die krumme Linie ebenfalls in M berührt, ist wenn seine durch den Berührungspunkt gehende Ordinate u heißt,

$u - b = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2u}{dx^2}}$, weil in diesem Fall $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$ ist. Bezeichnet man dieses Kreises Halbmesser wie bisher durch c; so verhält sich vermöge der Gleichung n. 5. $c : r = \frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2u}{dx^2}$, und es ist für die dem Berührungspunkt entsprechende Abscisse AP.

$$6.)\ \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{r}{c}\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Der Ausdruk für r ist scheinbar negativ. Wenn aber, wie im Fall der Figur, die krumme Linie ihre hole Seite gegen die Axe der Abscissen kehrt; so haben die Ordinate MP und das zweyte Differential derselben entgegengesezte Zeichen (§. 68. n. 5.). Folglich bekommt die halbe Chorde MQ des berührenden Kreises einerley Zeichen mit der Ordinate. Umgekehrt verhält es sich, wenn die Ordinate und ihr zweytes Differential einerley Zeichen haben. In diesem Fall kehrt aber die krumme Linie ihre erhabene Seite gegen die Axe der Abscissen (§. 65. n. 5.). Folgt liegt der Mittelpunkt desjenigen berührenden Kreises, dessen Halbmesser durch die Gleichung n. 5. bestimmt ist, immer auf der holen Seite der krummen Linie.

§. 80. Aus dem vorhergehenden §. folgt, daß, wenn

man an einen Punkt M (Fig. 27.) einer krummen Linie eine Normallinie MN zieht, und von derselben von dem Punkt M an auf der holen Seite des Bogens MM' das Stük

$$MC = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$$

abschneidet, der aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CM beschriebene Kreis mit der krummen eine innigere Berührung haben werde, als jeder mit einem kleineren oder größeren Halbmesser beschriebene Kreis. Jener bestimmte Kreis wird also die krumme Linie in M so berühren, daß zwischen ihm und Bogen MM' kein anderer Kreis kann durchgezogen werden. Denn vermöge des vorhergehenden §. ist für den Berührungspunkt M

$$u = y, \quad \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ und daher}$$

$$1.) P'M' - P'm' = \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dx^3}\right) + \frac{\overline{\Delta x}^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^4u}{dx^4}\right) + \&c.$$

Der Coefficient von $\overline{\Delta x}^3$ sey erstlich positiv, und Δx so klein genommen, daß das erste Glied dieser Reihe die Summe aller folgenden übertreffe; so ist für diesen Werth PP' von Δx, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe desselben der Unterschied $P'M' - P'm'$ positiv, mithin $PM > P'm'$, und der Kreisbogen Mm' innerhalb oder auf der holen Seite der krummen Linie. Könnte nun zwischen diesem Kreisbogen und dem Bogen MM' der krummen Linie ein anderer Kreis durchgehen; so müßte sein Mittelpunkt auf der Normallinie MN liegen, weil er sonst die Tangente TMt schneiden, und von M ein Stük seines Bogens ausserhalb der krummen Linie fallen würde. Ferner müßte sein Halbmesser größer als CM seyn, weil er sonst innerhalb des schon beschriebenen Kreises fallen würde. Es sey also auf der Normallinie MN (Fig. 28.) die $MC' > MC$ auf der holen Seite der krummen Linie abgeschnitten, und aus C' als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $C'M$ ein Kreis beschrieben; so wird dieser die krumme Linie in M berühren (§. 79.). Man ziehe eine Ordinate $P'M'$, welche der

krummen Linie in M', dem Kreis in m' begegne; so wird man haben

$$P'M' = y + \frac{\Delta x}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \text{&c.}$$

$$P'm' = u + \frac{\Delta x}{1}\frac{du}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2.3}\frac{d^2u}{dx^3} + \text{&c.}$$

Da aber dieser Kreis die krumme Linie in M berührt; so ist für die Abscisse AP die Ordinate $u = y$, $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$, und, wenn man $C'M = c$ sezt, $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{r}{c}\frac{d^2y}{dx^2}$ (§. 79. n. 6.). Folglich ist

2.) $P'M' - P'm' = \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(1 - \frac{r}{c}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dx^3}\right) + \text{&c.}$

Nun liegt C' auf der holen Seite der krummen Linie, auf welcher auch in der 27. und 28sten Figur die Axe AP der Abscissen liegend angenommen wird, und r ist $< c$ (Constr.); folglich ist $1 - \frac{r}{c}$ positiv und $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, mithin das erste Glied dieser Reihe negativ. Nimmt man Δx so klein; daß das erste Glied die Summe aller folgenden übertrifft; so wird für diesen Werth von Δx, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe der Unterschied $P'M' - P'm'$ negativ, d. i. $P'm' > P'M'$. Also liegt von dem Berührungspunkt an gerechnet ein Theil des aus C' als Mittelpunkt beschriebenen Kreisbogens auf beyden Seiten von M ausserhalb der krummen Linie MM', und er geht daher nicht zwischen dem Bogen des aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises und zwischen dem Bogen MM' der krummen Linie durch.

Der Coefficient von $\overline{\Delta x}^3$ in der Reihe n. 1. sey zweytens negativ, und Δx wiederum so klein genommen, daß das erste Glied dieser Reihe die Summe aller folgenden übertreffe; so wird in Beziehung auf den mit dem Halbmesser r beschriebenen berührenden Kreis $P'M' - P'm'$ negativ, $P'm' > P'M'$, und von M an ein Theil des Kreisbogens ausserhalb der krummen Linie seyn. Mithin müßte, wenn

ein anderer Kreis zwischen diesem Kreisbogen und dem Bogen der krummen Linie sollte durchgehen können, sein Mittelpunkt auf der Normallinie MN liegen, und sein Halbmesser c kleiner seyn als r. Es sey also $c = C''M < CM$ oder r, und mit dem Halbmesser c aus C'' als Mittelpunkt ein Kreis beschrieben; so wird, weil für die Abscisse AP die Ordinate $u = y$, und $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$ ist,

3.) $P'M' - P'm' = \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(1 - \frac{r}{c}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dx^3}\right) + \&c.$

Nun ist, weil $C''M < CM$ (Constr.) der Factor $1 - \frac{r}{c}$ negativ; also, weil $\frac{d^2y}{dx^2}$ ebenfalls negativ ist (Voraussf.) der Coefficient von $\overline{\Delta x}^2$ positiv. Man nehme Δx so klein, daß das erste Glied der Reihe n. 3. die Summe aller folgenden übertreffe; so ist für diesen Werth von Δx, und um so mehr für alle noch kleinere Werthe desselben, $P'M' - P'm'$ positiv, und daher $P'M' > P'm'$. Folglich fällt ein Stük des aus C'' als Mittelpunkt mit dem Halbmesser c beschriebenen Kreisbogens von M an innerhalb der krummen Linie. Der aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r beschriebene Kreisbogen aber lag von M an eine Strecke hin ausserhalb der krummen Linie. Folglich geht wiederum zwischen dem lezteren Kreisbogen und dem Bogen der krummen Linie kein anderer Kreisbogen durch.

Ebenso kann gezeigt werden, daß auch auf der anderen Seite des Punkts M kein anderer Kreis zwischen dem aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreis und dem Bogen MB der krummen Linie durch gezogen werden könne.

§. 81. Unter allen Kreisen, welche eine krumme Linie berühren, hat also derjenige, dessen Halbmesser $r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$ ist, die innigste Berührung mit der krummen Linie,

seine Krümmung kommt unter allen möglichen Kreisen der Krümmung der krummen Linie an dem Berührungspunkt am nächsten, und er dient dazu, die Krümmung einer vorgegebenen Linie an einem gegebenen Punkt zu beurtheilen, welche desto größer oder kleiner seyn wird, je kleiner oder größer der Halbmesser dieses Kreises ist. Derjenige Kreis, welcher eine krumme Linie so berührt, daß zwischen ihm und dem Bogen der krummen Linie kein anderer Kreis kann durch gezogen werden, heißt daher der Krümmungskreis (circulus curvaturæ, circulus osculator), sein Halbmesser heißt der Krümmungshalbmesser (radius curvaturæ, osculi), und sein Mittelpunkt heißt der Mittelpunkt der Krümmung.

Es ist also

1.) der Krümmungshalbmesser $r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$,

und zu der Bestimmung der Lage des Mittelpunkts der Krümmung hat man vermöge n. 2. und 3. §. 79. die zwey rechtwinklichte Coordinaten

2.) $\left.\begin{matrix} AD \\ a \end{matrix}\right\} = x + r\,\frac{dy}{ds}$,

3.) $\left.\begin{matrix} CD \\ b \end{matrix}\right\} = y - r\,\frac{dx}{ds}$.

Da die Normallinie $MN = y\,\frac{ds}{dx}$ ist (§. 75.); so ist, wenn man diese mit N bezeichnet

4.) $r = \frac{N^3}{-y^3\,\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Und weil $u - b$ oder $MQ = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$ ist (§. 79. n. 4.); so ist

5.) die durch den Berührungspunkt gehende mit den Ordinaten y parallel laufende Chorde MK des Krümmungskreises $= \frac{2\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Der Unterschied der zu einerley Abscisse $x + \Delta x$ gehörigen Ordinaten der krummen Linie und des Krümmungskreises ist, wenn die dem Berührungspunkt entsprechende Abscisse x heißt, nach §. 80. n. 1.

$$P'M' - P'm' = \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dx^3}\right) + \frac{\overline{\Delta x}^4}{1.2.3\,4}\left(\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^4u}{dx^4}\right) + \&c.$$

und daher ändert das erste Glied seine Zeichen, wenn man Δx negativ sezt. Mithin liegt, wenn $\frac{d^2y}{dx^3}$ nicht $= \frac{d^3u}{dx^3}$ ist, der Krümmungskreis auf der einen Seite des Berührungspunkts innerhalb, auf der anderen ausserhalb der krummen Linie, und der Krümmungskreis schneidet die krumme Linie in dem Berührungspunkt, auf ähnliche Art, wie die Tangente an dem Wendungspunkt die krumme Linie in dem Berührungspunkt schneidet (§. 65. n. 3.)

Ist aber $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3}$; so wird

$$P'M' - P'm' = \frac{\overline{\Delta x}^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^4u}{dx^4}\right) + \&c.$$

und der Krümmungskreis fällt auf beyden Seiten des Berührungspunkts innerhalb oder ausserhalb des Bogens der krummen Linie, je nachdem $\frac{d^4y}{dx^4}$ größer oder kleiner als $\frac{d^4u}{dx^4}$ ist.

Allgemein liegt der Krümmungskreis auf beyden Seiten des Berührungspunkts eine Strecke hin auf einerley oder verschiedenen Seiten der krummen Linie, je nachdem in der Reihe für die Differenz der Ordinaten des Krümmungskreises und der krummen Linie das erste Glied eine gerade oder ungerade Potenz von Δx enthält.

Wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist; so wird r unendlich, d. i. kein Kreis, wie groß auch sein Halbmesser seyn mag, kommt dem Lauf der krummen Linie in diesem Punkt so nahe, als eine gerade Linie, welche die krumme Linie in eben diesem Punkt berührt.

Wäre aber $r = 0$; so würde man immer, wie klein auch des berührenden Kreises Halbmesser seyn mag, einen Kreis mit einem noch kleineren Halbmesser beschreiben kön-

nen, welcher zwischen den ersteren Kreis und den Bogen der krummen Linie fiele.

§. 82. Man seze den Winkel *PMT* oder *ANM* (Fig. 27.) $= w$; so ist (§. 75.) $\frac{dy}{ds} = \text{Cos.}\, w$, $\frac{dx}{ds} = \text{Sin.}\, w$, und die Ausdrücke für die Coordinaten des Mittelpunkts der Krümmung (§. 81. n. 2. 3.) verwandeln sich in folgende

$$\left.\begin{matrix} AD \\ a \end{matrix}\right\} = x + r\,\text{Cos.}\, w,$$

$$\left.\begin{matrix} CD \\ b \end{matrix}\right\} = y - r\,\text{Sin.}\, w.$$

Ferner ist $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\text{Sin.}\, w} = \text{Cosec.}\, w$,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 = \frac{ds}{dx}\,\overline{\text{Cosec.}\, w}^2,$$

und $\frac{dy}{dx} = \text{Tg.}\, PMN$ (§. 66.) $= \text{Cotg.}\, w$;

folglich ist $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dw}{dx}\,\overline{\text{Cosec.}\, w}^2$, und daher nach §. 81. n. 1.

Der Krümmungshalbmesser $r = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{dw}{dx}} = \frac{ds}{dw}$.

Es sey Δs ein Stük eines Bogens s einer krummen Linie, und Δz sey der in Graden ausgedrükte Winkel, welchen die an die Endpunkte des Bogens Δs gezogenen Normallinien mit einander machen. Wäre Δs ein Stük eines Kreisbogens, dessen Halbmesser $= R$; so würde der halbe Umfang dieses Kreises $= R\pi$ seyn, und sich verhalten $R\pi : \Delta s = 180 : \Delta z$. Mithin würde der Halbmesser $R = \frac{180}{\pi}\frac{\Delta s}{\Delta z}$ seyn. Es ist aber $\frac{\pi}{180}\Delta z$ die Länge eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogens, welcher den Winkel Δz mißt, weil $180 : \Delta z = \pi$ zu der Länge dieses Bogens. Sezt man den lezteren $= \Delta w$; so ist $R = \frac{\Delta s}{\Delta w}$. Je kleiner nun Δs und zugleich Δw werden, desto mehr nähert sich der Exponent $\frac{\Delta s}{\Delta w}$ des Differenzverhältnißes dem Expo-

nenten $\frac{ds}{dw}$ des Differentialverhältnißes, d. i. dem Krümmungshalbmesser r. Der Halbmesser R eines Kreises, dessen halber Umfang die vierte geometrische Proportionalgröße zu dem Winkel, welchen die an die Endpunkte eines Bogens einer krummen Linie gehenden Normallinien mit einander machen, zu zwey rechten Winkeln und zu der Länge des erwähnten Bogens ist, nähert sich also dem Krümmungshalbmesser der krummen Linie desto mehr, je kleiner das Verhältniß des von den Normallinien eingeschloßenen Winkels zu vier rechten Winkeln ist.

§. 83. Die Coordinaten AD, DC (Fig. 27.) des Mittelpunkts C des Krümmungskreises hängen von der Lage des Berührungspunkts M ab, und sind, wenn die krumme Linie gegeben ist, vermöge der Gleichungen n. 1. 2. u. 3. des 81sten §. gegebene Functionen von x. Folglich werden die Mittelpunkte aller Krümmungskreise auf einer krummen Linie liegen, deren Abscissen und Ordinaten für jeden gegebenen Werth von x mittelst der angeführten Gleichungen gefunden werden können. Um die Eigenschaften dieser krummen Linie zu finden, sey BM (Fig. 29.) eine krumme Linie, für welche eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ gegeben sey. Die gerade Linie MT berühre die krumme Linie in M, MN sey die Normallinie und auf der lezteren der Punkt m der Mittelpunkt des Krümmungskreises an dem Punkt M. Man ziehe mp auf AP senkrecht; so ist mp eine Ordinate der krummen Linie $abme$, auf welcher die Mittelpunkte der Krümmungskreise der krummen Linie BM liegen, und Ap ist die dazu gehörige Abscisse. Sezt man $Ap = t$, $pm = u$, $Mm = r$; so hat man (§. 81.)

1.) $t = x + r \frac{dy}{ds}$,

2.) $u = y - r \frac{dx}{ds}$,

3.) $r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Aus der lezteren Gleichung folgt, wenn man beyderseits mit $\frac{ds}{dx}$ multiplicirt,

$$\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{-\frac{d^2y}{dx^2}} = r\,\frac{dx}{ds},$$

$$= y - u \text{ (n. 2.)}.$$

Daher ist $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = -(y-u)\,\frac{d^2y}{dx^2}$,

oder, weil $\left(\frac{ds}{dx}\right) = 1 + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ ist (§. 74.),

$$4.)\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right) + (y-u)\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Ferner verhält sich vermöge der Gleichungen n. 1. u. 2.

$$t - x : y - u = r\,\frac{dy}{ds} : r\,\frac{dx}{ds},$$

$$= \frac{dy}{dx} : 1;\ \text{folglich ist}$$

$$5.)\ t = x + y\,\frac{dy}{dx} - u\,\frac{dy}{dx}.$$

Man differentiire diese Gleichung, in welcher t, y, u, und $\frac{dy}{dx}$ Functionen von x sind; so erhält man

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\,\frac{d^2y}{dx^2} - u\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$\text{Aber } 0 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-u)\,\frac{d^2y}{dx^2},\ \text{(n. 4.)};$$

folglich ist $\frac{dt}{dx} = -\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}$,

$$\text{oder } 6.)\ \frac{dt}{du} = -\frac{dy}{dx}.$$

Es verhält sich aber wegen der Parallelen pm und PM

$$\left.\begin{matrix} pm \\ u \end{matrix}\right\} : pN = PM : PN = dx : dy \text{ (§. 66.)}$$

$$= -du : dt \text{ (n. 6.)};$$

folglich ist $pN = -u\,\frac{dt}{du}$ = der Subtangente der krummen Linie bm (§. 66.), welche hier wegen des Subtractionszeichens

chens auf die Verlängerung der Abscisse *Ap* fällt. Die Normallinie *Mm* berührt also die krumme Linie *bme* in dem Punkt *m* so, daß das zwischen dem Berührungspunkt *m* und dem Punkt *M* der krummen Linie *BM* liegende Segment *Mm* dieser Tangente dem Krümmungshalbmesser an *M* gleich ist.

Vermöge der Gleichung n. 2. ist $(y-u)\frac{ds}{dx} = r$; also, wenn man differentiirt

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{du}{dx}\right)\frac{ds}{dx} + (y-u)\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{dr}{dx}.$$

Aber $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (§. 74.), und daher

$$2\frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$(y-u)\frac{d^2s}{dx^2} = (y-u)\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{ds},$$

$$= -\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\frac{dy}{ds} \text{ (n. 4.)}.$$

Folglich ist $\left(\frac{dy}{dx} - \frac{du}{dx}\right)\frac{ds}{dx} - \left(\frac{ds}{dx}\right)^2\frac{dy}{ds} = \frac{dr}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{du}{dx} - \frac{ds}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dr}{dx}\cdot\frac{dx}{ds},$$

oder $-\frac{du}{dx} = \frac{dr}{ds}$,

und, wenn man beyderseits mit $\frac{ds}{dt}$ multiplicirt,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{ds}{dx}\cdot\frac{du}{dt},$$

$$= \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dy} \text{ (n. 6.)}, = \frac{ds}{dy}.$$

Mithin ist $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$ (§. 74. 75.),

$$= \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 1, \text{ (n. 6.)},$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2},$$

$$dr = dt\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2} = \text{dem Differential des Bogens } abm$$

(§. 74.), und daher $r =$ Bogen $am + C$.

An einem anderen Punkt B der krummen Linie BM sey der Krümmungshalbmesser $Bb = r'$, und b der Mittelpunkt der Krümmung; so ist vermöge des bewiesenen

$$r' = \text{Bogen } ab + C,$$

$$\left.\begin{matrix}\text{und } r - r' \\ Mm - Bb\end{matrix}\right\} = \text{Bogen } am - \text{Bogen } ab = \text{Bogen } bm.$$

§. 84. Umgekehrt, wenn man an einen gegebenen Punkt a (Fig. 29.) einer krummen Linie $abme$ eine Tangente Bb zieht, und auf derselben von dem Berührungspunkt b an ein Stük Bb von einer gegebenen Länge h abschneidet, sodenn an irgend einen anderen Punkt m der krummen Linie $abme$ eine Tangente MmN zieht, und auf derselben von dem Berührungspunkt m an das Stük mM so nimmt, daß der Unterschied zwischen Mm und Bb der Länge des zwischen den Berührungspunkten b, m liegenden Bogens bm der krummen Linie bme gleich wird; so liegen alle so bestimmte Punkte B, M auf einer krummen Linie BM, deren Tangenten MT mit den correspondirenden Tangenten MmN der krummen Linie bme rechte Winkel machen, und deren Mittelpunkte der Krümmung die Berührungspunkte m der lezteren, deren Krümmungshalbmesser also $= Mm$ sind.

Um dieses zu zeigen, seyen MP, mp auf AP senkrecht, mq mit AP parallel, $Ap = t$, $pm = u$, $pmN = v$, der Bogen $bm = s'$, $AP = x$, $PM = y$; so sind

$$PM = Pq + qM = pm + qM = pm + Mm \text{ Cos. } pmN,$$
$$AP = Ap - pP = Ap - mq = Ap - Mm \text{ Sin. } pmN,$$

d. i. weil $Mm = bm + Bb = s' + h$ ist (Voraussf.),

1.) $y = u + (s' + h) \text{ Cos. } v,$

2.) $x = t - (s' + h) \text{ Sin. } v.$

Aus diesen Gleichungen, in welchen x, y, u, s' und v Functionen von t sind, erhält man durch das Differentiiren,

3.) $\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{ds'}{dt} \text{ Cos. } v - (s' + h) \frac{dv}{dt} \text{ Sin. } v,$

4.) $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{ds'}{dt} \text{ Sin. } v - (s' + h) \frac{dv}{dt} \text{ Cos. } v.$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit Cos. v,

die zweyte mit Sin. v, und zieht von der ersten die zweyte ab; so erhält man

5.) $\frac{dy}{dt}$ Cos. v - $\frac{dx}{dt}$ Sin. $v = \frac{du}{dt}$ Cos. v - Sin. $v + \frac{ds'}{dt}$.

Es ist aber Sin. $v = \frac{dt}{ds'}$, und Cos. $v = -\frac{du}{ds'}$ (§. 75. wenn man t, u statt x, y sezt, und das Zeichen von du umkehrt, weil in Fig. 29. die Ordinate u abnimmt, wenn t wächst); folglich ist

$$\frac{du}{dt} \text{ Cos. } v = -\frac{du}{dt} \cdot \frac{du}{ds'} = -\frac{dt}{ds'} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

$$\text{und } \frac{du}{dt} \text{ Cos. } v - \text{Sin. } v = -\frac{dt}{ds'} \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \frac{dt}{ds'},$$

$$= -\frac{dt'}{ds'} \left(\left(\frac{du}{dt}\right) + 1\right),$$

$$= -\frac{ds'}{dt} \text{ (§. 74.)}.$$

Demnach heben sich in der Gleichung n. 5. die Glieder hinter dem Gleichheitszeichen gegen einander auf, und man hat

$\frac{dy}{dt}$ Cos. v - $\frac{dx}{dt}$ Sin. $v = 0$, oder

6.) $\frac{dy}{dx} = \text{Tg. } v$.

Da nun Tg. $PTM = \frac{dy}{dx}$ (§. 66.); so ist $PTM = v = \left\{\begin{matrix} pmN \\ PMN \end{matrix}\right\}$, mithin, weil MP auf AP senkrecht ist (Constr.), der Winkel NMT ein rechter, oder jede Tangente NmM der krummen Linie bme ist eine Normallinie der krummen Linie BM.

Multiplicirt man aber die Gleichung n. 3. mit Sin. v, die Gleichung n. 4. mit Cos. v, und addirt sie; so erhält man

$$\frac{dy}{dt} \text{ Sin. } v + \frac{dx}{dt} \text{ Cos. } v = \frac{du}{dt} \text{ Sin. } v + \text{Cos. } v - (s' + h) \frac{dv}{dt}.$$

Aber Sin. $v = \frac{dt}{ds'}$, $\frac{du}{dt}$ Sin $v = \frac{du}{ds} = -$ Cos. v;

folglich verwandelt sich die gefundene Gleichung in diese

$$\frac{dy}{dt}\,\text{Sin.}\,v+\frac{dx}{dt}\,\text{Cos}\,v=-(s'+h)\frac{dv}{dt},$$

$$\text{oder}\ \frac{dy}{dx}\,\text{Sin.}\,v+\text{Cos.}\,v=-(s'+h)\frac{dv}{dx}.$$

Man setze den Winkel ANM, welchen die Tangente MmN der krummen Linie bme, d. i. vermöge des bewiesenen die Normallinie der krummen Linie BM mit der Axe der Abscissen macht, $=w$; so ist $v+w=R$, und $\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}=0$, auch $\frac{dy}{dx}=\text{Cotg.}\,w$ (§. 66.).

Sezt man die Ausdrücke in die zulezt gefundene Gleichung; so wird

$$\text{Cotg.}\,w\,\text{Cos.}\,w+\text{Sin.}\,w=(s'+h)\frac{dw}{dx},$$

$$\left.\frac{\overline{\text{Cos.}\,w^2}+\overline{\text{Sin.}\,w^2}}{\text{Sin.}\,w}\right\}=(s'+h)\frac{dw}{dx},$$

$$\frac{1}{\text{Sin.}\,w}$$

oder, wenn man den Bogen $BM=s$, und nach §. 75. $\text{Sin.}\,w=\frac{dx}{ds}$ sezt,

$$\frac{ds}{dx}=(s'+h)\frac{dw}{dx},$$

7.) $\frac{ds}{dw}=s'+h=mb+bB=mM$ (Constr.).

Nach §. 82. ist aber $\frac{ds}{dw}$ dem Krümmungshalbmesser der krummen Linie BM an dem Punkt M gleich; folglich ist das zwischen der krummen Linie BM und dem Berührungspunkt m der krummen Linie bme liegende Segment Mm der geraden Linie, welche die leztere berührt, dem Krümmungshalbmesser der ersteren gleich.

§. 85. Die krumme Linie BM (Fig. 29.) kann also auch auf folgende Art durch eine stetige Bewegung beschrieben werden. Man denke sich das eine Ende eines Fadens irgendwo in e an dem Umfang der krummen Linie bme befestigt, dessen Länge dem Bogen emb und der geraden Linie

Bb zusammen genommen gleich sey; so wird, wenn dieser Faden auf den Bogen *emb* aufgewickelt, und sein Rest *bB* gerade ausgespannt ist, sein anderes Ende auf den Punkt *B* der krummen Linie *BM* fallen, und sein gerade ausgespannter Theil *Bb* die krumme Linie *bme* in *b* berühren. Wird nun dieser Faden nach und nach von der krummen Linie *bme* abgewickelt, und sein abgewickelter Theil *Mm* gerade ausgespannt; so wird *Mm* die krumme Linie *bme* in *m* berühren, und es wird $Mm = mb + bB$ seyn. Folglich wird der bewegliche Endpunkt des Fadens, während er von der krummen Linie *bme* abgewickelt wird, die krumme Linie *BM* beschreiben. Daher heißt die krumme Linie *abme*, von welcher der Faden abgewickelt wird, die Evolute (Evoluta) der krummen Linie *BM*, welche von dem beweglichen Endpunkt des Fadens beschrieben wird, und die durch Abwiklung erzeugte krumme Linie (curva evolutione genita) heißt.

Die Evolute einer krummen Linie ist also der geometrische Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise für die durch ihre Abwiklung erzeugte krumme Linie, und die erstere wird von den Krümmungshalbmessern der lezteren berührt (§. 84.).

§. 86. Wenn für eine krumme Linie eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x und y gegeben ist; so kann mittelst der Formeln n. 1. 2. u. 3. §. 83. immer die Gleichung für ihre Evolute gefunden werden. Sezt man in die Gleichungen n. 1. u. 2. den Werth von r aus n. 3; so erhält man

1.) $$t = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und 2.) $$u = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man mittelst der zwischen x und y gegebenen Gleichung die Coordinaten x und y eli-

miniren, und daher eine Gleichung zwischen u und t erhalten, welche immer algebraisch seyn wird, wenn die zwischen y und x gegebene Gleichung algebraisch ist. Die Abscissen t sind mit den Abscissen x von einerley Anfangspunkt an und nach einerley Richtung genommen. Die Ordinaten u sind mit den Ordinaten y parallel, und mit denselben auf einerley Seite der Axe der Abscissen liegend angenommen. Kommen t oder u negativ heraus; so zeigt diß die entgegengesezte Lage derselben von der in der 29sten Figur vorausgesezten Lage an.

Aber aus der Gleichung für die Evolute kann nicht immer eine endliche Gleichung für die durch ihre Abwiklung erzeugte krumme Linie gefunden werden. Wenn t und u die Abscissen und Ordinaten der vorgegebenen Evolute sind; so hat man vermöge der Gleichungen n. 1. u. 2. des 84sten §., wenn man statt Cos. v und Sin. v ihre in eben diesem §. angegebenen Werthe - $\frac{du}{ds'}$ und $\frac{dt}{ds'}$ sezt,

3.) $y = u - (s' + h)\frac{du}{ds'}$,

und 4.) $x = t - (s' + h)\frac{dt}{ds'}$,

wo $s' = \int dt \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dt}\right)}$ ist.

Die Auflösung dieser Aufgabe erfordert also die Rectification der Evolute, welches nicht immer möglich ist. Ueberdiß muß, wenn die durch Abwikluna erzeuate krumme Linie bestimmt seyn soll, die constante Größe h, d. i. die Länge des nicht aufgewickelten Theils Bb Fig. 29.) des Fadens an einem gegebenen Punkt b der Evolute aegeben seyn. Denkt man sich zwey Punkte auf dem abgewickelten Theil des Fadens; so beschreibt während der ferneren Abwiklung jeder Punkt eine eiaene krumme Linie, auf deren jeder der Fäden beständig senkrecht ist (§. 84.). Der Abstand der zwey Punkte mißt also die Entfernung der zwey durch Abwiklung erzeugten krummen Linien von einander, welche hienach constant ist. Daher heißen diese krummen Linien curvæ æquidistantes.

Wenn der Faden nur bis nach *b* reicht, oder ganz aufgewickelt ist; so haben die Evolute und die durch Abwiklung erzeugte krumme Linie den Punkt *b* gemeinschaftlich, und der Krümmungshalbmesser der lezteren an diesem Punkt ist = 0.

Wenn die Evolute einen Wendungspunkt hat; so geht an demselben die Abwiklung in Aufwiklung, oder umgekehrt, über, und der dem Wendungspunkt entsprechende Punkt der durch Abwiklung erzeugten krummen Linie ist eine Spitze der zweyten Art (§. 73.).

Wenn endlich die Evolute eine Asymptote hat; so wächst der Krümmungshalbmesser der durch die Abwiklung erzeugten krummen Linie beständig, so wie sich die Lage des Fadens der Lage der Asymptote nähert, und er wird für denjenigen Punkt der durch Abwiklung erzeugten Linie, in welchem sie von der Asymptote geschnitten wird, unendlich.

§. 87. Man soll z. B. die Evolute der Parabel finden. Für diese ist, wenn ihr Parameter p heißt, $y^2 = px$,

$$2y\frac{dy}{dx} = p,$$

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx^2} = 0,$$

oder $4y^3\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2ydy}{dx}\right)^2 = 0,$

und $4y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2$, weil $\frac{2ydy}{dx} = p.$

Ferner ist $4y^2 + 4y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ oder (§. 74.) $4y^2\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 4y^2 + p^2,$

und daher $8y^3\frac{dy}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right) = p(4y^2 + p^2) = p(4px + p^2),$

$= p^2(p + 4x)$, mithin nach §. 86. n. 1.

1.) $t = x + \frac{p + 4x}{2} = \frac{1}{2}p + 3x,$

Sodenn ist nach §. 86. n. 2.

$$u = y - \frac{(4y^2 + p^2)y}{p^2},$$

oder 2.) $u = -\frac{4y^3}{p^2}.$

Da nun $t = \frac{1}{2}p + 3x$; so ist $x = \frac{t - \frac{1}{2}p}{3}$,

$$\left.\begin{matrix} px \\ y^2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{3}p\,(t - \tfrac{1}{2}p),$$

$$y^6 = \frac{1}{27}\,p^3\,(t - \tfrac{1}{2}p)^3.$$

Aber $u^2 = \frac{16y^6}{p^4}$ (n. 2.);

folglich ist 3.) $pu^2 = \frac{16}{27}\,(t - \frac{1}{2}p)^3$, welches die gesuchte Gleichung für die Evolute der Parabel ist. Es sey AK (Fig. 30.) die Axe der Parabel, ihr Scheitel A und Brennpunkt F. Da u und y entgegengesezte Zeichen haben (n. 2.); so liegt die der Ordinate PM der Parabel entsprechende Ordinate pm ihrer Evolute Cm auf der anderen Seite der Axe AK, und die zu der negativen Ordinate PM' der Parabel gehörige Ordinate pm' der Evolute ist positiv, liegt also oberhalb der Axe. Für $t = \frac{1}{2}p$ wird $u = 0$, und daher ist, wenn man auf der Verlängerung von AF über F hinaus $FC = FA$, mithin $AC = \frac{1}{2}p$ nimmt, C ein Punkt der Evolute.

Man setze $\frac{27}{16}\,p = a$; so ist $au^2 = (t - \frac{1}{2}p)^3 = \overline{Cp}^3$. Diese krumme Linie gehört, wenn man Abscissen und Ordinaten mit einander verwechselt, in die Classe der §. 73. n. 2. betrachteten, und heißt die Neilische Parabel, oder parabola semicubica. Aus §. 84. folgt umgekehrt, daß, wenn man an einem beliebigen Punkt e der krummen Linie, für welche man die Gleichung $au^2 = \overline{Cp}^3$ hat, einen Faden, dessen Länge dem Bogen $em\,C$ und der CA (oder $\frac{8}{27}\,a$) zusammengenommen gleich ist, befestigt, der bewegliche Endpunkt dieses Fadens während der Abwiklung die Parabel AM beschreiben werde, deren Parameter $p = \frac{16}{27}\,a$ ist. An dem Scheitel A der Parabel wird der Krümmungshalbmesser $= CA = \frac{1}{2}p$.

§. 88. Man soll die Evolute der Ellipse finden. Sezt man ihre halbe große Axe $= a$, halbe kleine Axe $= b$, und rechnet die Abscissen x auf der großen Axe von ihrem Mittelpunkt an; so hat man die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x^2,$$

und daher $y\,\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\,x$,

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{b^2}{a^2},$$

$$y^3\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} - \left(y\,\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} y^2 - \frac{b^4}{a^4} x^2,$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\left(y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2\right) = -\frac{b^4}{a^2}.$$

Sodenn iſt $y^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ oder $y^2 \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = y^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2,$

$$= \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2\right),$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{f^2}{a^2} x^2\right),$$ wenn man $a^2 - b^2 = f^2$ ſezt.

Alſo iſt $y^3 \frac{dy}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = -\frac{b^4}{a^4}\left(a^2 - \frac{f^2}{a^2} x^2\right) x,$

und $\frac{\frac{dy}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = x - \frac{f^2 x^3}{a^4},$

mithin 1.) $t = \frac{f^2 x^3}{a^4}$ (§. 86. n. 1.).

Ferner iſt $y^2 \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = y^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2,$

$$= y^2 + \frac{b^2}{a^2}(b^2 - y^2),$$

$$= \frac{b^4}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2} y^2,$$

$$= \frac{b^4}{a^2} + \frac{f^2}{a^2} y^2,$$

$$y^3 \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{b^4}{a^2} y + \frac{f^2}{a^2} y^3;$$

also $\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{a^2}{b^4}\left(\frac{b^4}{a^2} y + \frac{f^2}{a^2} y^3\right),$

$$= -y - \frac{f^2 y^3}{b^4},$$

und vermöge §. 86. n. 2.

2.) $u = -\frac{f^2 y^3}{b^4}$.

Die Ordinaten der Ellipse und ihrer Evolute sind also ebenfalls einander entgegengesezt, und daher liegen die zusammengehörigen Ordinaten dieser krummen Linien auf verschiedenen Seiten der Axe.

Aus n. 1. folgt $\left(\frac{x}{a}\right)^3 = \frac{at}{f^2}$,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{at}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{b^2}{a^2}\,x^2 = b^2\left(\frac{at}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\left.\begin{array}{l} b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 \\ \text{oder } y^2 \end{array}\right\} = b^2\left(1 - \left(\frac{at}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right),$$

und aus n. 2. findet man

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = -\frac{bu}{f^2},$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{bu}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}};$$

folglich ist $\left(\frac{bu}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{at}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}}$,

oder 3.) $u^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(\frac{f^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{2}{3}}\right)$,

$= \left(\frac{b'}{a'}\right)^{\frac{2}{3}}(a'^{\frac{2}{3}} - t'^{\frac{2}{3}})$, wenn man $\frac{f^2}{a} = a'$, und $\frac{f^2}{b} = b'$

sezt.

Für $t = 0$ wird $u = \pm b' = \pm\frac{f^2}{b} = \pm\frac{a^2 - b^2}{b} = \pm\frac{a^2}{b} \mp b$. Da nun die zusammengehörigen Ordinaten der Ellipse und ihrer Evolute auf verschiedenen Seiten der Axe liegen (n. 2.); so sind die Krümmungshalbmesser an den Scheiteln der kleinen Axe der Ellipse $= \frac{a^2}{b}$ = dem halben Parameter der kleinen Axe.

Für $u = 0$ wird $t = \pm a' = \pm\frac{f^2}{a} = \pm\frac{a^2 - b^2}{a} = \pm a \mp \frac{b^2}{a}$, und daher sind die Krümmungshalbmesser an den Scheiteln der großen Axe dem halben Parameter dieser Axe gleich.

Die Evolute der Ellipse liegt ganz innerhalb eines Parallelogramms, dessen Diagonalen mit der großen und kleinen Axe der Ellipse zusammenfallen, und beziehungsweise $2\frac{(a^2 - b^2)}{a}$ und $2\frac{(a^2 - b^2)}{b}$ sind.

Wenn eine gerade Linie von der Länge a' oder $\frac{f^2}{a}$ sich so bewegt, daß ihre Endpunkte beständig die zwey Axen der Ellipse berühren; so berührt

sie vermöge des zweyten Beyspiels §. 77. in jeder ihrer Lagen eine krumme Linie, deren Gleichung ist $y^{\frac{2}{3}} = a'^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$.

Man vergrößere die mit der kleinen Axe der Ellipse parallel laufende Ordinaten dieser krummen Linie in dem gegebenen Verhältniß von $b' : a'$ oder von $a : b$; so liegen die Endpunkte dieser Ordinaten auf der Evolute der Ellipse

Wenn aber die sich bewegende gerade Linie $= b'$ oder $\frac{f^2}{b}$ ist; so muß man die mit der großen Axe der Ellipse parallel laufende Ordinaten der krummen Linie in dem gegebenen Verhältniß von $a' : b'$ oder von $b : a$ vermindern, um die Ordinaten der Evolute der Ellipse zu erhalten. Hienach kann man so viele Punkte der Evolute der Ellipse geometrisch bestimmen, als man will *).

Auf ähnliche Art findet man die Gleichung für die Evolute der Hyperbel. Es sey die halbe Queeraxe $= a$, die halbe zugeordnete Axe $= b$, und $f^2 = a^2 + b^2$; so ist wenn man $\frac{f^2}{a} = a'$, $\frac{f^2}{b} = b'$ macht, und die Abscissen t der Evolute auf der Queeraxe der Hyperbel von ihrem Mittelpunkt an rechnet, die Gleichung für die Evolute der Hyperbel

$$u^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{b'}{a'}\right)^{\frac{2}{3}} (t^{\frac{2}{3}} - a'^{\frac{2}{3}}).$$

§. 89. Für die Kegelschnitte ist, wenn man von der allgemeinen Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{2a} x^2$ ausgeht, in welcher man für die Hyperbel $2a$ negativ und ihrer Queeraxe gleich, für die Parabel aber $2a$ unendlich macht, nach §. 65.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{4y^3}.$$

Es ist aber, wenn man auf die angenommene Axe bezogene Normallinie $= N$ sezt, der Krümmungshalbmesser $r = \frac{N^3}{-y^3 \frac{d^2y}{dx^2}}$ (§. 81. n. 4.); folglich ist für die Kegelschnitte $r = \frac{N^3}{\frac{1}{4}p^2}$, und daher verhalten sich die Krümmungshalbmesser eines jeden Kegelschnitts, wie die Würfel der auf die Axe bezogenen Normallinien.

Man differentiire obige Gleichung; so kommt

$$2y \frac{dy}{dx} = p - \frac{p}{a} x, \text{ und es ist}$$

$$4y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2 - \frac{2p^2}{a} x + \frac{p^2}{a^2} x^2,$$

*) *M. de Prasse* de ellipseos evoluta & æquidistantibus earumque constructione. *Lipsiae*, 1798.

$$= p^2 - \frac{2p}{a}\left(px - \frac{p}{2a}x^2\right),$$

$$= p^2 - \frac{2p}{a}y^2,$$

$$\left.\begin{matrix} 4y^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \\ 4\left(y\frac{ds}{dx}\right)^2 \end{matrix}\right\} = p^2 + 4\left(1 - \frac{p}{2a}\right)y^2,$$

d. i. $N^2 = \frac{1}{4}p^2 + \left(1 - \frac{p}{2a}\right)y^2$ (§. 75.).

Also ist der zu der Ordinate y gehörige Krümmungshalbmesser eines Kegelschnitts

$$r = \frac{\left(\frac{1}{4}p^2 + \left(1 - \frac{p}{2a}\right)y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}.$$

Es werde umgekehrt die krumme Linie gesucht, deren Krümmungshalbmesser sich wie ihre Normallinien verhalten; so muß seyn $r = \frac{N^3}{c^2}$, wo c eine constante Größe ist. Da nun $r = \frac{N^3}{-y^3\frac{d^2y}{dx^2}}$ (§. 81. n. 4.); so hat man

$$c^2 = -y^3\frac{d^2y}{dx^2}, \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{c^2}{y^3}, \text{ und daher}$$

$$\left.\begin{matrix} 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} \\ \frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{dx} \end{matrix}\right\} = -2c^2y^{-3}\frac{dy}{dx}.$$ Hieraus erhält man durch das Integriren

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \text{Const.} + \frac{c^2}{y^2} = \frac{Cy^2 + c^2}{y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{Cy^2 + c^2},$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{Cy^2 + c^2}} = dx, \text{ und wenn man noch einmal integrirt,}$$

$$\frac{1}{C}\sqrt{Cy^2 + c^2} = C' + x.$$

Da der Anfangspunkt der Abscissen willkührlich ist; so kann man ihn so bestimmen, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ wird. Alsdenn muß seyn, wenn man in der gefundenen Gleichung x und $y = 0$ sezt, $\frac{c}{C} = C'$, so daß die Gleichung wird

$$\frac{1}{C}\sqrt{Cy^2+c^2} = \frac{c}{C} + x,$$

oder $\sqrt{Cy^2+c^2} = c + Cx$, und wenn man sie rational macht,

$$Cy^2 + c^2 = c^2 + 2Ccx + C^2x^2,$$

$$y^2 = 2cx + Cx^2.$$

Die gesuchte krumme Linie ist also ein Kegelschnitt, dessen Hauptparameter $= 2c$, und dessen halbe Axe $= \frac{c}{C}$ ist, und zwar eine Parabel, wenn $C = 0$, eine Ellipse, wenn C negativ, und eine Hyperbel, wenn C positiv ist. Daher haben nur die Kegelschnitte die Eigenschaft, daß sich die Krümmungshalbmesser wie die Würfel der Normallinien verhalten.

§. 90. Wenn ein Kreis NMn (Fig. 31.) sich über einer geraden Linie AB so hin wälzt, daß er diese gerade Linie beständig berührt, und nach und nach alle Punkte seines Umfangs an dieselbige anlegt; so beschreibt ein gegebener Punkt M seines Umfangs eine krumme Linie ADB, welche die Cykloide oder Radlinie heißt. Es seyen A und B zwey zunächst auf einander folgende Punkte, in welchen der beschreibende Punkt M die gerade Linie AB berührte; so wird AB dem Umfang des sich fortwälzenden Kreises gleich seyn.

Man errichte auf der Mitte C von AB ein Perpendickel CD, welches dem Durchmesser Nn des Kreises gleich sey, und beschreibe um CD als Durchmesser einen Kreis; so wird mit diesem der beschreibende Kreis zusammenfallen, wenn er eine halbe Umdrehung gemacht hat, und daher die Cykloide durch den Punkt D gehen, welchen man ihren Scheitel nennt. Es ergiebt sich leicht aus der Entstehungsart der Cykloide, daß die gerade Linie CD alle auf ihr senkrechte oder mit AB parallele Chorden MM' der Cykloide halbirt, und sie heißt daher die Axe, die gerade Linie AB aber die Basis der Cykloide.

Man ziehe durch irgend einen von A, D, B verschiedenen Punkt M der Cykloide die AP auf AB, und die MQ auf DC senkrecht, welche dem Kreis nMN in M, dem Kreis DLC in L, und dem an den Berührungspunkt N gehenden Durchmesser Nn des ersteren in H begegne. Ferner ziehe man die Halbmesser MO, LK, und die Chorden MN, LC; so sind die rechtwinklichten Dreyecke NMH und CLQ, so wie die HMO und QLK congruent, und $CLMN$ ist ein Parallelogramm. Da nun der Bogen MN der geraden Linie AN, und AC dem halben Umfang NMn gleich ist; so ist der Bogen Mn oder $LD = NC = ML$, mithin

1.) $MQ = QL +$ Bogen LD
$= DK$ Sin. $LD +$ Bogen LD.

und $DQ = DK + DK$ Cos. LKC
$= DK - DK$ Cos. LD.

Und weil $AN =$ Bogen $MN =$ Bogen LC, $PN = MH = LQ$; so ist

2.) $AP =$ Bogen $LC - LK$ Sin. LC,
$PM = LK - LK$ Cos. LC.

Man setze den Halbmesser des erzeugenden Kreises $= a$, $AP = x$, $PM = y$, und der Winkel LKC verhalte sich zu zwey rechten Winkeln

$= v : \pi$, wo π den halben Umfang eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreises bezeichnet; so ist

$$x = av - a \text{ Sin. } v,$$
$$y = a - a \text{ Cos. } v.$$

Hieraus erhält man (§. 43. Beysp.)

$\frac{dy}{dx} = \text{Cotg. } \frac{1}{2} v$, $\frac{dx}{dy} = \text{Tg. } \frac{1}{2} v$. Es ist aber, wenn die gerade Linie MT die Cykloide in M berührt, $\frac{dx}{dy} = \text{Tg. } PMT$ (§. 66.); folglich ist $PMT = \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} CKL = CDL$, und daher die Tangente MT mit der Chorde DL parallel. Die Chorde MN ist also eine Normallinie der Cykloide, welche hienach mit der Chorde LC parallel ist.

Ferner ist $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Big\} = 1 + \overline{\text{Cotg. } \frac{1}{2} v}^2 = \overline{\text{Cosec. } \frac{1}{2} v}^2$,
$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \Big\}$

und $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4a} \overline{\text{Cosec. } \frac{1}{2} v}^4$ (§. 43. Beysp.);

folglich ist an dem Punkt M der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{\overline{\text{Cosec. } \frac{1}{2} v}^3}{\frac{1}{4a} \overline{\text{Cosec. } \frac{1}{2} v}^4} \text{ (§. 81. n. 1.)},$$

$$= \frac{4a}{\text{Cosec. } \frac{1}{2} v} = 4a \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} v = 2 CL = MN.$$

Wenn man also die Normallinie MN so nach m verlängert, daß $Nm = NM$; so ist m der Mittelpunkt des dem Punkt M entsprechenden Krümmungskreises der Cykloide, und wenn man auf der über C hinaus verlängerten Axe die $Cb = CD$ nimmt; so ist b der Mittelpunkt des Krummungskreises für den Scheitel D der Cykloide.

Man vollende das Parallelogramm $ACbc$, beschreibe über Ac als Durchmesser einen Halbzirkel, ziehe durch m die Parallele mq mit AB, welche diesen Halbzirkel in l schneide, und die Parallele mp mit Db. Da $MN = Nm$; so ist $\left.\begin{matrix} MP \\ NH \end{matrix}\right\} = pm = Aq$, mithin der Bogen Al = dem Bogen MN, und die Chorde Al mit MN parallel. Es ist also auch $lm = NA$ = Bogen MN = dem Bogen Al, $qm = ql +$ Bogen Al; folglich liegt nach n. 1. der Punkt m auf dem Umfang einer Cykloide Amb, welche die gerade Linie Ac zur Axe hat, deren Scheitel in A fällt, und deren Basis ab mit der Basis AB in der Entfernung $Cb = CD$ parallel lauft. Demnach ist die Evolute Amb der halben Cykloide AMB selbst wieder eine der lezteren gleiche und ähnliche Cykloide. Eben so verhält es sich mit der anderen Hälfte $DM'B$, wozu die Evolute Bb gehört.

Da der Krümmungshalbmesser der doppelten auf die Basis bezogenen Normallinie gleich ist; so verschwindet er mit dieser in A. Folglich ist der Bogen Am der Cykloide dem abgewickelten Theil Mm des Fadens, oder,

weil $Mm = 2Nm = 2Al$ ist, der Chorde Al zweymal genommen gleich. Eben dieses gilt also auch von der Cykloide ADB, welche der Evolute aAb gleich und ähnlich ist, und es ist der Bogen $DM = 2$ Chorde DL. Der ganze Bogen ADB ist hienach viermal so lang als der Durchmesser DC des erzeugten Kreises.

Daß der Bogen $DM = 2DL$ sey, findet man auch so:

Es ist, wie man vorhin gefunden hat, $\frac{ds}{dx} = \text{Cosec.} \frac{1}{2}v$, und $\frac{dx}{dv}$ findet sich aus dem für x gegebenen Ausdruk $= a - a\,\text{Cos.}\, v = 2a\,\text{Sin.}\, \frac{1}{2}v^2$; folglich ist

$$\frac{ds}{dv} = 2a\,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}v, \text{ und } s = \text{Const.} - 4a\,\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}v \text{ (§. 30. n. 2.).}$$

Soll nun der Bogen s von A an gerechnet werden; so muß $s = 0$ seyn für $r = 0$, mithin $0 = \text{Const.} - 4a$, $4a = \text{Const.}$, und der Bogen $AM = 4a - 4a\,\text{Cos.}\, \frac{1}{2}v = 2CD - 2DL$.

Wenn aber der Punkt M in D fällt; so verschwindet DL, und der Bogen AMD wird $= 2CD$. Folglich ist $AM = AMD - 2DL$, und $2DL = AMD - AM = DM$.

Durch die Anwendung der Formeln n. 1. u. 2. des 83sten §. auf die Cykloide findet man folgende Ausdrücke für die Abscisse und Ordinate ihrer Evolute:

$$t = av - \text{Sin.}\, v + 2a\,\text{Sin.}\, v = av + a\,\text{Sin.}\, v,$$
$$u = a - \text{Cos.}\, v - 2a + 2a\,\text{Cos.}\, v = -(a - a\,\text{Cos.}\, v).$$

Die der Abscisse Ap oder t entsprechende Ordinate u der Evolute ist also negativ, und man muß $pm = a - a\,\text{Cos.}\, v$ unterhalb der Basis AB nehmen. Man hat demnach, wenn das Parallelogramm $Apmq$ vollendet wird,

$$\left.\begin{matrix} Ap \\ mq \end{matrix}\right\} = av + a\,\text{Sin.}\, v, \text{ und } \left.\begin{matrix} pm \\ Aq \end{matrix}\right\} = a - a\,\text{Cos.}\, v,$$

und daher liegen vermöge n. 1. die Punkte m auf einer Cykloide, welche A zum Scheitel, $Ac = 2a$ zur Axe hat, und der Cykloide AMD gleich und ähnlich ist.

Will man aus den zwey Gleichungen $x = av - a\,\text{Sin.}\, v$, $y = a - a\,\text{Cos.}\, v$ den Bogen v eliminiren; so hat man aus der lezteren $a\,\text{Cos.}\, v = a - y$, $av = a\,\textit{Arc.}\,\text{Cos.}\, \frac{a-y}{a}$, $a\,\text{Sin.}\, v = \sqrt{a - (a-y)^2} = \sqrt{2ay - y^2}$. Diese Werthe in die erste Gleichung gesezt geben

$$x = a\,\textit{Arc.}\,\text{Cos.}\, \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

Auf ähnliche Art kann man eine Gleichung zwischen DQ und QM finden. Für die Rechnung ist es bequemer, die Coordinaten durch eine dritte veränderliche Größe auszudrücken, wie es oben durch v geschehen ist.

Siebentes Capitel.

Von der Quadratur und Rectification krummer Linien, und von der Bestimmung der Oberfläche und des Inhalts runder Körper.

§. 91. Es sey BMm (Fig. 32. 33.) eine krumme Linie, für welche eine Gleichung zwischen den Abscissen $CP = x$ und den Ordinaten $PM = y$ gegeben sey. Ferner sey AB eine gegebene Ordinate, von welcher die vermischtlinigte Fläche $ABMP$ oder u an gerechnet werde. Diese Fläche u ist eine Function von CP oder x. Ungeachtet diese Function noch unbekannt ist, kann ihr Differential auf folgende Art gefunden werden. Wenn die Abscisse CP um Pp oder Δx wächst, und man die neue Ordinate pm zieht; so wächst die Fläche $ABMP$ um $PMmp$ oder Δu, und es ist, wenn man die Parallelogramme $PMRp$, $PNmp$ vollendet,

1.) $\Delta u \left\{ \begin{matrix} > PR \\ < Pm \end{matrix} \right.$ Fig. 32., wenn die Ordinaten von M bis m beständig wachsen,

2.) $\Delta u \left\{ \begin{matrix} < PR \\ > Pm \end{matrix} \right.$ Fig. 33., wenn die Ordinaten von M bis m beständig abnehmen.

Es ist aber, wenn man den Coordinatenwinkel $CPM = c$ sezt, das Parallelogramm $PR = PM \times Pp \operatorname{Sin.} c = y \Delta x \operatorname{Sin.} c$, und das Parallelogramm $Pm = pm . Pp \operatorname{Sin.} c = (y + \Delta y) \Delta x \operatorname{Sin.} c$.

Folglich ist für den ersten Fall

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} > y \operatorname{Sin.} c,$$
$$< y \operatorname{Sin} c + \Delta y \operatorname{Sin.} c.$$

Da nun durch die Verminderung von Δx die Δy, und um so mehr $\Delta y \operatorname{Sin.} c$ kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Größe, so ist (§. 6.)

$$\frac{du}{dx} = y \operatorname{Sin.} c.$$

In dem zweyten Fall ist Δy negativ, und

Δu

$\frac{\Delta u}{\Delta x} < y \cdot \text{Sin. } c,$

$> y \text{ Sin. } c + \Delta y \text{ Sin. } c$

Folglich ist wiederum

$\frac{du}{dx} = y \text{ Sin. } c.$

Wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist; so ist Sin. $c = 1$, und es wird

$\frac{du}{dx} = y.$

Demnach ist $u = \text{Const.} + \text{Sin. } c. \int y dx$, wo die constante Größe so zu bestimmen ist, daß $u = 0$ wird für $x = CA = a$. Schneidet die krumme Linie die Axe in dem Anfangspunkt A der Abscissen (Fig. 34.), und verlangt man die Fläche AMP; so muß die Constante so bestimmt werden, $u = 0$ wird für $x = 0$.

§. 92. Die Bestimmung des Flächeninhalts krummer Linien, welche gewöhnlich die Quadratur krummer Linien heißt, erfordert also Integralrechnung. Wenn man aber das Integral von ydx nicht genau angeben kann; so kann man eine vorgegebene krumme Linie auf folgende Art quadriren.

Weil $\frac{du}{dx} = y$; so ist $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$, und allgemein $\frac{d^ru}{dx^r} = \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}$. Folglich ist nach dem Taylorischen Saz

$$\Delta u = \frac{\Delta x}{1} \cdot y + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3} \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{\overline{\Delta x}^r}{1.2 \ldots r} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} + \text{&c.}$$

welche Reihe den Inhalt des zwischen den Ordinaten y und $y + \Delta y$ liegenden, oder den durch diese Ordinaten, das Stük Δx der Axe der Abscissen und den Bogen der krummen Linie begränzten Flächenraum ausdrükt. Man kann den ganzen zu bestimmenden Flächenraum in mehrere solche Stücke zerfällen, wodurch der Abstand Δx der Ordinaten vermindert, und die Reihe geschwinder convergirend gemacht wird.

Eine andere Reihe für den Flächeninhalt der krummen Linie findet sich so:

Weil $d.xy = ydx + xdy$ (§. 36.);

so ist $xy = \int ydx + \int xdy$,

oder $\int ydx = xy - \int xdy$,

$= xy - \int x \frac{dy}{dx} . dx$, wo $\frac{dy}{dx}$, mithin auch $x \frac{dy}{dx}$ eine gegebene Function von x ist.

Ferner ist $d.x^2 \frac{dy}{dx} = \left(2x \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx$;

folglich $x^2 \frac{dy}{dx} = 2\int x \frac{dy}{dx} . dx + \int x^2 \frac{d^2y}{dx^2} . dx$,

oder $\int x \frac{dy}{dx} . dx = \frac{1}{2} x^2 \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d^2y}{dx^2} . dx.$

Allgemein ist $d. x^r \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} = rx^{r-1} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} . dx + x^r \frac{d^ry}{dx^r} . dx$;

und daher $\int x^{r-1} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} . dx = \frac{1}{r} x^r \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} - \frac{1}{r} \int x^r \frac{d^ry}{dx^r} . dx.$

Hienach wird $\int ydx = \text{Const.} + xy - \int xdy$,

$= C + xy - \frac{x^2}{1.2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2} \int x^2 \frac{d^2y}{dx^2} . dx$,

$= C + xy - \frac{x^2}{1.2} \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{1.2.3} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{1.2.3} \int x^3 \frac{d^3y}{dx^3} . dx$,

$= C + xy - \frac{x^2}{1.2} \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{1\,2.3} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots$

$\pm \frac{x^r}{1.2 \ldots r} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} \pm \frac{1}{1.2 \ldots r} \int x^r \frac{d^ry}{dx^r} . dx.$

Wenn $y = x^m$, und m eine positive ganze Zahl ist; so bricht diese Reihe ab, und man erhält das Integral von $x^m dx$ genau. In den übrigen Fällen enthält das lezte Glied, wie weit man auch die Reihe fortsetzen mag, ein Integral, welches man sollte angeben können, um das Integral von ydx genau zu erhalten. Wenn aber die Reihe convergirt; so kann man diese Ergänzung vernachläßigen, und man hat für $\int ydx$ eine unendliche Reihe, welche unter dem Namen der Bernouillischen Reihe bekannt ist *).

*) *Joannis Bernoulli* Opera. T. I. pag. 125. & seqq.

§. 93. Die Auflösung der umgekehrten Aufgabe, aus dem Gesez, nach welchem der Flächeninhalt u einer krummen Linie von der Abscisse x abhängt, die Gleichung für die krumme Linie zu finden, erfordert nur Differentialrechnung. Wenn nemlich u irgend einer gegebenen Function Fx von x gleich ist; so hat man

$$\frac{du}{dx} = \frac{d.Fx}{dx} = \text{einer gegebenen Function } F'x \text{ von } x.$$

Es ist aber, wenn die rechtwinklichte Ordinate der krummen Linie $= y$ gesezt wird,

$$\frac{du}{dx} = y \text{ (§. 91.)};$$

folglich ist $y = F'x = \frac{d.Fx}{dx}$ die gesuchte Gleichung für die krumme Linie. Auf ähnliche Art wird man verfahren, wenn der Coordinatenwinkel einem gegebenen schiefen Winkel c gleich seyn sollte. Man kann also so viele krumme Linien finden, als man will, welche algebraisch quadrirbar sind, wenn man u einer algebraischen Function von x gleich sezt *).

Sey z. B. $u = \frac{1}{3}a^2 - \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a}$;

so ist $\left.\begin{matrix}\frac{du}{dx}\\ \text{oder } y\end{matrix}\right\} = +\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x,$

$$= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

Also ist $y^2 = \frac{x^2(a^2-x^2)}{a^2}$ die gesuchte Gleichung für die krummen Linie. Weil u mit x zugleich verschwindet; so ist $\frac{1}{3}a^2 - \frac{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}{3a}$ der Ausdruk des durch die Abscisse x, die Ordinate y und den Bogen der krummen Linie begränzten Flächeninhalts.

§. 94. Beyspiele von Quadraturen. Wenn der Parameter einer Parabel $= p$, die von ihrem Scheitel an gerechnete Abscisse $= x$, und die ihr entsprechende rechtwinklichte Ordinate $= y$ gesezt wird; so ist $y^2 = px$,

*) *Newtoni* Opusc. I. Analysis per æquationes numero terminorum infinitas, pag. 26. Inventio curvarum, quæ possunt quadrari.

$y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, und daher

$du = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$. Hieraus findet sich nach §. 14.

$$u = C + \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = C + \tfrac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} . x = C + \tfrac{2}{3} xy.$$

Soll die Fläche u von dem Scheitel der Parabel an gerechnet werden; so muß $u = o$ seyn für $x = o$, und daher $C = o$. Der Flächenraum, welcher durch den von dem Scheitel an gerechneten Bogen, die Abscisse und die Ordinate begränzt ist, macht also $\frac{2}{3}$ des Rechteks aus der Abscisse und Ordinate aus, und wenn man das Rechtek aus der Abscisse und Ordinate vollendet; so wird dieses durch den Bogen der Parabel in dem Verhältniß von 1 : 2 getheilt. Ebenso findet man, daß, wenn die Ordinaten zu irgend einem Durchmesser der Parabel gezogen werden, und man das Parallelogramm aus Abscisse und Ordinate vollendet, der Bogen der Parabel dieses Parallelogramm in dem Verhältniß von 1 zu 2 theile.

Für die Ellipse ist, wenn man ihre halbe Axen mit a und b bezeichnet, und die Abscissen von ihrem Scheitel an rechnet,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),\ y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

$$du = ydx = \frac{b}{a} dx \sqrt{2ax - x^2}.$$

Es ist aber, wenn man die der Abscisse x entsprechende Ordinate eines über der Axe $2a$ als Durchmesser beschriebenen Kreises mit y', und die durch x, y' und den Kreisbogen begränzte Fläche mit u' bezeichnet,

$$y' = \sqrt{2ax - x^2},\ du' = dx\sqrt{2ax - x^2}.$$

Folglich verhält sich $\frac{du}{dx} : \frac{du'}{dx} = b : a$, mithin auch, wenn u und u' zugleich mit x verschwinden sollen, $u : u' = b : a$ (§. 13.). Die Quadratur der Ellipse reducirt sich also auf die Quadratur des Kreises, und es verhält sich die Fläche der ganzen Ellipse zu der Fläche eines über der Axe $2a$ als Durchmesser beschriebenen Kreises wie die andere Axe $2b$ zu dieser Axe $2a$, oder die Fläche der Ellipse ist der Fläche eines Kreises gleich, dessen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den zwey halben Axen der Ellipse ist.

Es sey AM (Fig. 35.) eine Hyperbel, deren Mittelpunkt C, halbe Queeraxe CA und Asymptoten CS, CS seyn. Man ziehe durch den Scheitel A der Hyperbel die Parallelen AK, AL mit CS' und CS, und durch einen beliebigen Punkt M der Hyperbel die Ordinate MQ mit der Asymptote CS' parallel; so ist, wenn man $CK = k$, $CQ = x$, $QM = y$, den Coordinatenwinkel SQM oder $SCS' = c$ und die Fläche $AMQK = u$ sezt,

$$y = \frac{k^2}{x}, \text{ und (§. 91.) } du = k^2 \operatorname{Sin.} c \frac{dx}{x},$$

$$= k^2 \operatorname{Sin.} c.\ d.\ \operatorname{Lg.nat.} x, \text{ (§. 29. n. 4.).}$$

Folglich ist $u = \text{Const.} + k^2 \operatorname{Sin.} c.\ \operatorname{Lg.} x$. Man verlangt aber die von der Ordinate AK an gerechnete Fläche; folglich muß $u = o$ seyn für $x = CK = k$, und man hat zur Bestimmung von C die Gleichung $o = C + k^2 \operatorname{Sin.} c \operatorname{Lg.} k$, woraus $C = -k^2 \operatorname{Sin.} c \operatorname{Lg.} k$ folgt. Demnach ist der

Flächeninhalt u des vermischtlinigten Trapeziums $KAMQ =$

$k^2 \text{Sin.}c\,\text{Lg.}x - k^2\text{Sin.}c\,\text{Lg.}k = k^2\text{Sin.}c\,\text{Lg.}\frac{x}{k}$, wo durch Lg. wie bisher natürliche Logarithmen bezeichnet werden.

Vermöge der Eigenschaften der Hyperbel ist $CQ \times QM = \overline{CK}^2$; folglich ist, wenn man die gerade Linie CM zieht, das Dreyek CQM = dem Dreyek CHA. Aber, wenn man von der Fläche $CAMQC$ das Dreyek CQM hinwegnimmt; so bleibt der hyperbolische Sector ACM übrig, und wenn man von derselben Fläche das Dreyek CKA hinwegnimmt; so bleibt das vermischtlinichte Trapezium $KAMQ$ übrig. Folglich ist der Sector ACM dem Trapezium $KAMQ$ gleich, und

$$\left.\begin{matrix}\text{so wohl } KAMQ\\ \text{als Sector } ACM\end{matrix}\right\} = k^2\,\text{Sin.}c\,\text{Lg.}\frac{x}{k} = AKCL \times \text{Lg.}\frac{CQ}{CK}.$$

Nimmt man die Linie CK zur Einheit an; so ist

$$\left.\begin{matrix}KAMQ\\ \text{oder Sector } ACM\end{matrix}\right\} = \text{Sin.}c\,\text{Lg.}x,$$ oder die Zahlen, welche die Flächenräume $KAMQ$ so wie die Flächen der Sectoren ACM ausdrücken, sind die Logarithmen der Zahlen, welche die Linien CQ ausdrücken, in einem System, dessen Modulus der Sinus von c für den Halbmesser 1 ist (§. 29.). In der gleichseitigen Hyperbel ist der Asymptotenwinkel c ein rechter, also Sin. $c = 1$, und die Zahlen, welche die Flächenräume der hyperbolischen Trapezien $KAMQ$ oder der hyperbolischen Sectoren ACM ausdrücken, sind alsdenn die natürlichen Logarithmen von CQ, wenn man CK der Einheit gleich sezt. Sollen für $CK = 1$ die Zahlen, welche die hyperbolischen Trapezien oder Sectoren ausdrücken die gemeinen Logarithmen von CQ seyn; so muß Sin. c dem Modulus der gemeinen Logarithmen, d. i. der Zahl 0,43429948... (§. 29.) gleich, mithin der Asymptotenwinkel $c = 25°\,44'\,25''$ seyn.

Man ziehe durch den Scheitel A der Hyperbel die AH auf die Queeraxe CA senkrecht; so ist das zwischen A und einer der Asymptoten liegende Stük AH dieses Perpendickels die halbe zugeordnete Axe der Hyperbel. Die auf CP senkrechte Ordinate MP sey bis an die Asymptote CS nach N verlängert; so verhält sich

$$CQ : CK = \left\{\begin{matrix}CK\\ AK\end{matrix}\right\} : QM, \text{ weil } CQ \times QM = \overline{CK}^2,$$

$$= AH : MN,$$

$$= AH : PN - PM,$$

$$= 1 : \frac{PN}{AH} - \frac{PM}{AH},$$

$$= 1 : \frac{CP}{CA} - \frac{PM}{AH},$$

$$= 1 : \frac{CP}{CA} - \frac{\sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2}}{CA}, \text{ weil } \overline{PM}^2 : \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{AH}^2 : \overline{CA}^2.$$

Folglich ist $\text{Lg.}\frac{CQ}{CK} = \text{Lg.}\frac{CA}{CP - \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2}}$.

Ferner ist der Rhombus $AKCL$ = dem Dreyek $CAH = \frac{1}{2}\,CA \times AH$;

$$\left.\begin{matrix} KAMQ \\ \text{oder Sect. } ACM \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\,CA \times AH \text{ Lg. } \frac{CA}{CP - \sqrt{CP^2 - AC^2}}.$$

Und weil das Dreyek $CPM = \frac{1}{2}\,CP \times PM = \frac{1}{2}\,\frac{AH}{AC} \cdot CP\sqrt{CP^2 - CA^2}$;
so ist die

$$\text{Fläche } AMP = \frac{1}{2}\,\frac{AH}{AC} \cdot CP\sqrt{CP^2 - CA^2} - \frac{1}{2}\,CA \times AH \text{ Lg. } \frac{CA}{CP - \sqrt{CP^2 - CA^2}},$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{AH}{AC}\,CP\sqrt{CP^2 - CA^2} + \frac{1}{2}\,CA \times AH \text{ Lg. } \frac{CP - \sqrt{CP^2 - CA^2}}{CA},$$

oder, wenn man die halbe Queerare $CA = a$, die halbe zugeordnete Are $AH = b$, und die von dem Mittelpunkt der Hyperbel an gerechnete Abscisse $CP = x$ sezt,

$$\text{Fläche } AMP = \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{2}\,ab \text{ Lg. } \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Für die Cykloide (Fig. 31.) ist, wenn man $DK = a$, $DQ = x$, $QM = y$ und den Winkel $DKL = v$ (durch die Länge eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogens gemessen) sezt,

$$\left.\begin{matrix} y = av + a \text{ Sin. } v \\ x = a - a \text{ Cos. } v \end{matrix}\right\} \text{(§. 90. n. 1.)}.$$

Aus der lezteren Gleichung erhält man $dx = adv$ Sin. v; folglich ist

$$\left.\begin{matrix} ydx \\ \text{oder } d. \text{ der Fläche } DMQ \end{matrix}\right\} = a^2 v\,dv \text{ Sin. } v + a^2\,dv\,\overline{\text{Sin. } v}^2$$

Es ist aber $d.(v \text{ Cos. } v) = dv \text{ Cos. } v - vdv \text{ Sin. } v$ (§. 36. u. §. 30. n. 2.), also

$$vdv \text{ Sin. } v = dv \text{ Cos. } v - d.(v \text{ Cos. } v),$$
$$= d. \text{ Sin. } v - d.(v \text{ Cos. } v) \text{ (§. 30. n. 1.)},$$

mithin $\int vdv \text{ Sin. } v = \text{Sin. } v - v \text{ Cos. } v$.

Und Sin. v^2 ist $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ Cos. $2v$, also $dv\,\overline{\text{Sin. } v}^2 = \frac{1}{2}\,dv - \frac{1}{2}\,dv$ Cos. $2v$, mithin

$\int dv \text{ Sin. } v^2 = \frac{1}{2}\,v - \frac{1}{4} \text{ Sin. } 2v$. Folglich ist die Fläche $DMQ = a^2(\text{Sin. } v - v \text{ Cos. } v + \frac{1}{2}\,v - \frac{1}{4} \text{ Sin. } 2v) + \text{Const.}$

Da nun die gesuchte Fläche in D anfangen soll; so muß die Constante so bestimmt werden, daß die Fläche für $v = 0$ verschwindet.

Weil der veränderliche Theil des Integrals mit v zugleich verschwindet; so ist $C = 0$, und

$DMQ = a^2(\text{Sin. } v - v \text{ Cos. } v + \frac{1}{2}\,v - \frac{1}{2} \text{ Sin. } v \text{ Cos. } v)$, weil Sin. $2v =$ 2 Sin. v Cos. v,

$$= a^2 \text{ Sin. } v(1 - \tfrac{1}{2} \text{ Cos. } v) + a^2 v(\tfrac{1}{2} - \text{Cos. } v).$$

Für $v = \pi$ wird Sin. $v = 0$, Cos. $v = -1$, und daher die Fläche $ADC = \frac{3}{2}\,a^2\pi$. Die Fläche $ADBA$ ist $= 3a^2\pi$, oder dreymal so groß als die Fläche des erzeugenden Kreises der Cykloide.

§. 94. Für die krumme Linie *BM* (Fig. 36.) sey eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ gegeben, man soll die Länge s des Bogens *BM* der krummen Linie finden, oder die krumme Linie rectificiren.

Man ziehe an den Punkt *M* der krummen Linie die *TMt*, welche von der neuen Ordinate *P'M'* in *t* geschnitten werde; so ist, wenn man *MR* mit *AP* parallel zieht,

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{d.BM}{ds}\right\} : \left\{\frac{d.AP}{dx}\right\} = Mt : PP', \\ \text{und } ds \quad : \quad dy \quad = Mt : tR \end{array}\right\} \text{§. 75.}$$

Folglich ist, weil der Coordinatenwinkel ein rechter ist,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Man bedient sich der ersten oder zweyten Formel, je nachdem die Wurzelgröße sich einfacher durch x oder durch y ausdrücken läßt. Die Bestimmung der Länge des Bogens s selbst, oder die Rectification krummer Linien, reducirt sich also wie ihre Quadratur auf die Integration einer gegebenen Differentialformel.

Es sey an der Axe *AK* der Abscissen eine andere krumme Linie *bm* so verzeichnet, daß jede ihrer anf *AK* ebenfalls senkrechten Ordinaten *Pm* der vierten geometrischen Proportionallinie zu der correspondirenden Ordinate *PM* der krummen Linie *BM*, zu der Normallinie *MN* und zu einer gegebenen oder nach Belieben angenommenen geraden Linie *a* gleich sey; so ist das Rechtek aus einer geraden Linie s, welche mit dem Bogen *BM* einerley Länge hat, und aus der geraden Linie *a* dem Flächenraum *APmb* gleich.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Da nemlich } PM : MN \\ \text{oder §. 75. } dx : ds \end{array}\right\} = a : Pm \text{ (Constr.)};$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{so ist } ads \\ a.\, d.\, BM \end{array}\right\} = Pm.\, dx = \text{d. Fläche } APmb \text{ (§. 91.)},$$

$$\text{und } a.\, BM = \text{Fläche } APmb.$$

Ebenso ist, wenn man durch den Anfangspunkt A der Abscissen die AL auf AK senkrecht, MQ mit AK parallel zieht, und auf der lezteren von Q an die Qm' der vierten geometrischen Proportionallinie zu QM, zu der auf die Axe AL bezogenen Normallinie MS und zu a nimmt, das Rechtek aus a und dem Bogen BM dem Flächenraum $Ab'm'Q$ gleich, welcher durch Ab', AQ, $m'Q$ und den Bogen $b'm'$ der krummen Linie begränzt wird, auf welcher alle nach diesem Gesez bestimmte Punkte m' liegen.

Denn es verhält sich jezt

$$\left.\begin{matrix} QM : MS \\ dy : ds \text{ (§. 75.)} \end{matrix}\right\} = a : Qm';$$

$$\left.\begin{matrix} \text{folglich ist } a.ds \\ a.d.BM \end{matrix}\right\} = Qm'.dy = Qm'.d.AQ, \text{ weil } AQ = PM,$$

$$= d.\text{Fläche } Ab'm'Q \text{ (§. 91.)},$$

und daher $a.BM =$ Fläche $AbmQ$.

Im ersten Fall ist $Pm = a\frac{ds}{dx} = a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$,

im zweyten $Qm' = a\frac{ds}{dy} = a\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$,

und man findet daher mittelst der Differentialrechnung aus der gegebenen Gleichung zwischen x und y die Gleichungen für die krummen Linien bm oder $b'm'$, wodurch die Rectification gegebener krummer Linien auf die Quadratur gegebener krummer Linien zurükgeführt wird.

Für die Neilische Parabel AM (Fig. 37.) z. B. ist, wenn $AP = x$, $PM = y$ und ihr Parameter $= p$ gesezt wird,

$$y^2 = \frac{x^3}{p}; \text{ folglich } 2y\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{p},$$

$$dy : dx = 3x^2 : 2py,$$

$$dy^2 : dx^2 = 9x^4 : 4p^2y^2,$$

$$= 9x^4 : 4px^3,$$

$$= 9x : 4p,$$

$$ds^2 : dx^2 = 4p + 9x : 4p,$$

mithin $Pm = a\sqrt{\frac{4p+9x}{4p}}$.

Da a nach Belieben genommen werden kann; so sezze man um den

Ausdruk zu vereinfachen $a = \frac{2}{3} p$. Alsdenn wird

$\overline{Pm}^2 = p\,(\frac{4}{9} p + x)$, oder, wenn man $AA' = \frac{4}{9} p$ macht,

$\overline{Pm}^2 = p.\,A'P$; mithin die krumme Linie bm eine Parabel, welche die gerade Linie $A'P$ zur Axe, den Punkt A' zum Scheitel, und die gerade Linie p zum Parameter hat. Die Fläche $AbmP$ ist also (§. 93.) $= \frac{2}{3} A'P \times Pm - \frac{2}{3} AA' \times Ab$. Es ist aber

$\overline{Pm}^2 = p.\,A'P$, und für $x = 0$, d. i. für die Abscisse $A'A$ der Parabel $A'm$, ist $Ab^2 = \frac{4}{9} p^2$; folglich ist

die Fläche $AbmP = \frac{2}{3} A'P\sqrt{p \times A'P} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} p.\,\frac{2}{3} p$

$$= \frac{2}{3} p \times A'P \sqrt{\frac{A'P}{p}} - \frac{2}{3} p.\,\frac{8}{27} \cdot p.$$

Da nun $a = \frac{2}{3} p$ genommen wurde; so ist

der Bogen $AM = A'P \sqrt{\frac{A'P}{p}} - \frac{8}{27} p$,

$$= \frac{8}{27} p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} p.$$

Eben diesen Ausdruk erhält man auch leicht unmittelbar mittelst der Integralrechnung.

Weil $ds = dx \sqrt{1 + \frac{9x}{4p}} = \frac{4}{9} p.\,\frac{9dx}{4p} \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}$; so ist nach §. 14.

$$s = C + \frac{\frac{4}{9} p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = C + \frac{8}{27} p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Soll der Bogen s von dem Punkt A an gerechnet werden; so muß $s = 0$ seyn für $x = 0$, und man hat zu der Bestimmung von C die Gleichung $0 = C + \frac{8}{27} p$.

Also ist der Bogen $AM = \frac{8}{27} p \left(1 + \frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} p$ wie vorhin.

§. 95. Rectification der Kegelschnitte. Weil für die Parabel $y^2 = px$ ist; so ist

$$2y \frac{dy}{dx} = p, \text{ und } dy : dx = p : 2y,$$

$$\overline{dy}^2 : \overline{dx}^2 = p^2 : 4y^2,$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{dy}^2 + \overline{dx}^2 \\ \overline{ds}^2 \end{matrix}\right\} : \overline{dy}^2 = \left\{\begin{matrix} p^2 + 4y^2 : p^2 \\ \frac{1}{4} p^2 + y^2 : \frac{1}{4} p^2, \end{matrix}\right.$$

$$ds : dy = \sqrt{\tfrac{1}{4} p^2 + y^2} : \tfrac{1}{2} p,$$

Folglich ist $\frac{1}{2} p\,ds = dy \sqrt{\frac{1}{4} p^2 + y^2}$. Betrachtet man $\sqrt{\frac{1}{4} p^2 + y^2}$ als die zu der Abscisse y gehörige Ordinate einer krummen Linie; so ist diese

eine mit der Queerare p beschriebene gleichseitige Hyperbel, und die Abscissen y sind auf der zugeordneten Axe von dem Mittelpunkt der Hyperbel an gerechnet. Vermöge §. 91. ist also $dy\sqrt{\frac{1}{4}p+y^2}$, das Differential des durch die Abscisse y, die Ordinate $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+y^2}$, den Bogen der Hyperbel, und durch ihre halbe Queerare $\frac{1}{2}p$ begränzten hyperbolischen Trapeziums, welches der Hälfte des Rechteks aus der Abscisse y und der Ordinate $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+y^2}$, und dem hyperbolischen Sector zusammengenommen gleich ist. Nach §. 93. findet man aber dieses hyperbolische Trapezium

$$= \tfrac{1}{2}y\sqrt{\tfrac{1}{4}p+y^2} + \tfrac{1}{8}p^2 \text{ Lg.} \frac{y+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+y^2}}{\frac{1}{2}p}; \text{ folglich ist}$$

$$s = \frac{y}{p}\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+y^2} + \tfrac{1}{4}p \text{ Lg.} \frac{y+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+y^2}}{\frac{1}{2}p}, \text{ welcher Ausdruk mit}$$

y zugleich verschwindet, und daher die Länge des der Ordinate y der Parabel entsprechenden von ihrem Scheitel an gerechneten parabolischen Bogens giebt. Weil $y^2 = px$; so ist auch

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{4}px+x^2} + \tfrac{1}{4}p \text{ Lg.} \left(2\sqrt{\frac{x}{p}} + \sqrt{1+\frac{4x}{p}}\right).$$

Wenn a und b die halbe große und halbe kleine Axe einer Ellipse bezeichnen, und die Abscissen x von dem Mittelpunkt der Ellipse an auf ihrer großen Axe genommen werden; so ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \text{ und } 2y\frac{dy}{dx} = -2\frac{b^2}{ax}x, \text{ mithin}$$

$$-dy : dx = \frac{b^2}{a^2}x : y,$$

$$\overline{dy}^2 : \overline{dx}^2 = \frac{b^4}{a^4}x^2 : \left\{\begin{matrix} y^2 \\ b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 \end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{dy}^2+dx^2 \\ \overline{ds}^2 \end{matrix}\right\} : \overline{dx}^2 = \frac{b^4}{a^4}x^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 : b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

$$= b^2-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2 : b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

$$= 1-\frac{e^2x^2}{a^2} : 1-\frac{x^2}{a^2}, \text{ wenn } \frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2.$$

$$: dx\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}$$

Also ist $ds = \dfrac{}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$. Diese Formel wird noch einfacher,

wenn man $\frac{x}{a} = \text{Sin. } v$ macht. Alsdenn ist $dx = adv \text{ Cos. } v$, und

$1 - \frac{x^2}{a^2} = \overline{\text{Cos.}\, v}^2$; folglich

$ds = a.dv\sqrt{1 - e^2\,\overline{\text{Sin.}\, v}^2}$. Es ist kein Mittel bekannt, diese Formel zu integriren, ohne die Wurzelgröße in eine Reihe zu entwickeln. Macht man diese Entwiklung; so wird

$$ds = adv\left(1 - \tfrac{1}{2}e^2\,\overline{\text{Sin.}\, v}^2 - \frac{1}{2.4}e^4\,\overline{\text{Sin.}\, v}^4 - \frac{1.3}{2.4.6}e^6\,\overline{\text{Sin.}\, v}^6 - \&c.\right).$$

Da nun $d.\overline{\text{Sin.}\, v}^{r-1}\,\text{Cos.}\, v = -dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^r + (r-1)\,dv\,\text{Cos.}\, v^2\,\overline{\text{Sin.}\, v}^{r-2}$,

$$= -dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^r + (r-1)\,dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^{r-2} - (r-1)\,dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^r,$$

$$= -rdv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^r + (r-1)\,dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^{r-2},$$

so ist $dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^r = -\frac{1}{r}d.\overline{\text{Sin.}\, v}^{r-1}\,\text{Cos.}\, v + \frac{r-1}{r}dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^{r-2}$,

$$\int dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^r = -\frac{1}{r}\,\overline{\text{Sin.}\, v}^{r-1}\,\text{Cos.}\, v + \frac{r-1}{r}\int dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^{r-2},$$

mithin $\int dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^2 = -\frac{1}{2}\text{Sin.}\, v\,\text{Cos.}\, v + \frac{1}{2}v$. Mittelst dieses Integrals erhält man ferner das Integral von $dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^4$, wenn man $r = 4$ sezt, sodenn das Integral von $dv\,\overline{\text{Sin.}\, v}^6$, u. s. w. Man kann also die einzelnen Glieder der für ds gefundenen Reihe integriren, und es wird

$$\frac{s}{a} = \text{Const.} + v - \tfrac{1}{2}e^2\left(\tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\, v\,\text{Cos.}\, v\right)$$

$$- \frac{1}{2.4}e^4\left(\frac{1.3}{2.4}v - \frac{1.3}{2.4}\,\text{Sin.}\, v\,\text{Cos.}\, v - \tfrac{1}{4}\,\overline{\text{Sin.}\, v}^3\,\text{Cos.}\, v\right)$$

$$- \frac{1.3}{2.4.6}e^6\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}v - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{Sin.}\, v\,\text{Cos.}\, v - \frac{1.5}{4.6}\,\overline{\text{Sin.}\, v}^3\,\text{Cos.}\, v - \tfrac{1}{6}\,\overline{\text{Sin.}\, v}^5\,\text{Cos.}\, v\right)$$

$$- \&c.$$

Soll der Bogen s von dem Scheitel der kleinen Axe an gerechnet werden; so ist die Constante $= 0$.

Sezt man $v = \frac{1}{2}\pi$; so erhält man die Länge eines Quadranten der

$$\text{Ellipse} = \tfrac{1}{2}a\pi\left(1 - (\tfrac{1}{2})^2e^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\frac{e^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\frac{e^6}{5} - \&c.\right)$$

Für die Hyperbel findet man, wenn ihre halbe Queeraxe mit a, ihre halbe zugeordnete Axe mit b bezeichnet, und die Abscissen x von ihrem Mittelpunkt an auf der Queeraxe genommen werden, $2y\frac{dy}{dx} = 2\frac{b^2}{a^2}x$,

$$dy : dx = \frac{b^2}{a^2}x : y,$$

$$\overline{dy}^2 : \overline{dx}^2 = \frac{b^4}{a^4}x^2 : \left\{\begin{matrix} y^2 \\ b^2 \\ \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}\overline{dy}^2 \\ \overline{ds}^2\end{matrix} + \overline{dx}^2\right\} : \overline{dx}^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)x^2 - b^2 : \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2,$$

$$= \frac{e^2x^2}{a^2} - 1 : \frac{x^2}{a^2} - 1, \text{ wenn } \frac{a^2+b^2}{a^2} = e^2.$$

Also ist $ds = \frac{dx\sqrt{\frac{e^2x^2}{a^2}-1}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} = ex\frac{dx}{a}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{1}{e^2}\frac{a^2}{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}.$

Man setze $\frac{x}{a} = \text{Sec. } v$; so ist $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \overline{\text{Sec. } v}^2$, $2x\frac{dx}{a^2} =$

$2\overline{\text{Sec. } v}^2 \text{ Tg. } v.\, dv$, $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 = \overline{\text{Sec. } v}^2 - 1 = \overline{\text{Tg. } v}^2$, und daher $ds =$

$aedv\overline{\text{Sec. } v}^2\sqrt{1-\frac{1}{e^2}\overline{\text{Cos. } v}^2}$. Durch die Entwiklung der Wurzelgröße in eine Reihe wird also

$$ds = aedv\overline{\text{Sec. } v}^2\left(1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}\overline{\text{Cos. } v}^2 - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{e^4}\overline{\text{Cos. } v}^4 - \frac{1\cdot 3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^6}\overline{\text{Cos. } v}^6 - \&c.\right)$$

$$= aedv\overline{\text{Sec. } v}^2 - \tfrac{1}{2}\frac{a}{e}dv - \frac{1}{2.4}\frac{a}{e^3}dv\overline{\text{Cos. } v}^2 - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{a}{e^5}dv\overline{\text{Cos. } v}^4 - \&c.$$

Das Integral des ersten Glieds ist ae Tg. v (§. 30. n. 3.), und das Integral des zweyten ist $\frac{1}{2}\frac{a}{e}v$. Weil nun $d.\overline{\text{Cos. } v}^{r-1}\text{Sin. } v = -$

$(r-1)dv\overline{\text{Sin. } v}^2\overline{\text{Cos. } v}^{r-2} + dv\overline{\text{Cos. } v}^r = -(r-1)dv\overline{\text{Cos. } v}^{r-2}$

$+(r-1)dv\overline{\text{Cos. } v}^r + dv\overline{\text{Cos. } v}^r = -(r-1)dv\overline{\text{Cos. } v}^{r-2} + rdv\overline{\text{Cos. } v}^r$;

so ist $dv\overline{\text{Cos. } v}^r = \frac{1}{r}d.\overline{\text{Cos. } v}^{r-1}\text{Sin. } v + \frac{r-1}{r}dv\text{Cos. } v^{r-2}$, und

$$\int dv\overline{\text{Cos. } v}^r = \frac{1}{r}\overline{\text{Cos. } v}^{r-1}\text{Sin. } v + \frac{r-1}{r}\int dv\overline{\text{Cos. } v}^{r-2}.$$

Man findet also wie bey der Ellipse gezeigt worden ist, die Integrale der übrigen Glieder, und es wird

$$s = \text{Const.} + ae\text{ Tg. } v - \tfrac{1}{2}\frac{a}{e}v$$

$$- \frac{1}{2.4}\frac{a}{e^3}\left(\tfrac{1}{2}\text{Sin. } v\text{ Cos. } v + \tfrac{1}{2}v\right)$$

$$- \frac{1.3}{2.4.6}\frac{a}{e^5}\left(\tfrac{1}{4}\text{Sin. } v\overline{\text{Cos. } v}^3 + \frac{1.3}{2.4}\text{Sin. } v\text{ Cos. } v + \frac{1.3}{2.4}v\right)$$

$$- \&c.$$

Soll der Bogen s von dem Scheitel der Hyperbel an gerechnet wer-

den, so muß $s = 0$ seyn für $x = a$, d. i. für Sec. $v = 1$, Tg. $v = 0$, Sin. $v = 0$. Die Constante ist also $= 0$.

§. 96. Wenn eine krumme Linie BM (Fig. 37. 38.) sich um die gerade Linie AK als eine Axe dreht; so beschreibt der Bogen BM die Oberfläche eines runden Körpers, dessen jeder Schnitt mit einer auf der Umdrehungsaxe AK senkrechten Ebene ein Kreis ist. Man ziehe die Ordinaten PM oder y auf die Umdrehungsaxe AK senkrecht, und nehme die Abscissen AP oder x auf der Umdrehungsaxe selbst von dem gegebenen Punkt A an. Die Abscisse AP wachse um PP' oder Δx; so wächst, wenn man die Ordinate $P'M'$ zieht, die von dem Bogen BM oder s beschriebene krumme Oberfläche S um das Stük ΔS, welches der Bogen MM' oder Δs während der Umdrehung der krummen Linie um die Axe AK beschreibt. Durch die Endpunkte M, M' der Ordinaten seyen die Parallelen MN, $M'N'$ mit der Umdrehungsaxe gezogen, und auf denselben die geraden Linien MN, $M'N$ dem Bogen MM' gleich abgeschnitten; so ist, wenn die Ordinaten von M bis M' beständig wachsen, die krumme Oberfläche, welche der Bogen MM' beschreibt, größer als die cylindrische von der ebenso großen geraden Linie MN beschriebene Oberfläche, weil von M an jeder Punkt des Bogens MM' weiter von der Umdrehungsaxe AK absteht, als jeder Punkt der geraden Linie MN. Hingegen ist die von dem Bogen MM' beschriebene Oberfläche kleiner als die von der ebenso großen geraden Linie $M'N'$ beschriebene Oberfläche, weil jeder Punkt des Bogens MM' von M an näher bey der Umdrehungsaxe AK liegt, als jeder Punkt der geraden Linie $M'N'$ *). Aber die cylindrischen Oberflächen, welche die geraden Linien MN, $M'N'$ beschreiben, sind beziehungsweise

$$2\pi . PM \times MN = 2\pi y \Delta s,$$

und $2\pi . P'M' \times M'N' = 2\pi (y + \Delta y) \Delta s$;

folglich ist $\Delta S : \Delta s > 2\pi y : 1$,

$$< 2\pi (y + \Delta y) : 1.$$

*) Archimeds viertes Axiom ist auf diejenigen Fälle nicht anwendbar, wo die krumme Linie ihre erhabene Seite gegen die Umdrehungsaxe kehrt (Fig. 38.), weswegen hier ein anderes Axiom angenommen worden ist (*l'Huilier* Expositio calc. diff. et integr. §. 119.).

Wenn die Ordinaten von M bis M' abnehmen; so findet sich wie vorhin

$$\Delta S : \Delta s < 2\pi y : 1,$$
$$> 2\pi (y - \Delta y) : 1.$$

Folglich ist in beyden Fällen

$$dS : ds = 2\pi y : 1.$$

Es ist aber $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (§. 74.); folglich ist (§. 39.)

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi y \frac{ds}{dx} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Man verlängere jede Ordinate PM (Fig 39.) der krummen Linie BM so nach m, daß Pm der auf die Umdrehungsaxe AK bezogenen Normallinie MN gleich werde; so ist

$$\left.\begin{matrix} Pm \\ y' \end{matrix}\right\} = y \frac{ds}{dx} \text{ (§. 75.), und daher } \left.\begin{matrix} 2\pi y' dx \\ \text{oder (§. 91.) } 2\pi d.\, DbmP \end{matrix}\right\} = 2\pi y ds = dS.$$

Folglich ist 2π mal die Fläche $DbmP = S$, oder es verhält sich die von dem Bogen BM beschriebene krumme Oberfläche zu dem Flächenraum $DbmP$, wie der Umfang eines Kreises zu seinem Halbmesser, und es reducirt sich die Bestimmung der von dem Bogen BM beschriebenen krummen Oberfläche auf die Quadratur der krummen Linie bm.

Wenn z. B. der Halbzirkel AMB (Fig. 40.) sich um seinen Durchmesser AB dreht, und N des Halbzirkels Mittelpunkt ist; so ist die Normallinie dem Halbmesser MN oder NA gleich, und die krumme Linie bm der 39sten Figur verwandelt sich in eine mit dem Durchmesser AB in der gegebenen Entfernung $AG = NA$ parallel laufende gerade Linie GH. Man verzeichne das Rechtek $AGHB$ (Fig. 40.) und verlängere die Ordinate PM bis an die GH nach m; so ist die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts, welche von dem Bogen AM beschrieben wird, gleich $2\pi . GA \times AP = \pi . AB \times AP = \pi . \overline{AM}^2$, weil $AB : AM = AM : AP$. Eben so ist die krumme Oberfläche, welche der Bogen BEM beschreibt $= \pi . \overline{BM}^2$. Folglich ist die krumme Oberfläche eines Kugelabschnitts der Fläche eines Kreises gleich, welcher die Chorde des beschriebenen Bogens zum Halbmesser hat (Archimed. l. 48. 49.), und die Oberfläche der ganzen Kugel ist viermal so groß als die Fläche eines größten Kreises derselben (Archim. I, 35.). Weil $\pi . AB$ dem Umfang eines mit dem Halbmesser AG beschriebenen Kreises gleich ist, und $GM = AP$; so ist auch die von dem Bogen AM beschriebene Oberfläche der von der geraden Linie GM beschriebenen cylindrischen Oberfläche gleich.

Die krumme Linie ABM (Fig. 39.) sey eine Parabel, deren Schei-

tel A und deren Axe die Umdrehungsaxe AK sey; so ist $\left.\begin{matrix}\overline{PM}^2 \\ y^2\end{matrix}\right\} = px$,

und $\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}p^2 + y^2 = \frac{1}{4}p^2 + px = p(\frac{1}{4}p + x)$.

Man nehme $AA' = \frac{1}{4}p$; so ist $A'P = \frac{1}{4}p + x$, und $p.A'P = p(\frac{1}{4}p + x) = \overline{MN}^2 = \overline{Pm}^2$. Die krumme Linie bm ist also eine mit demselben Parameter p beschriebene Parabel, deren Scheitel A' und deren Axe die $A'K$ ist. Man ziehe durch den Scheitel A der ersten Parabel die Ordinate AG der zweyten; so ist die von dem Bogen AM beschriebene krumme Oberfläche $= 2\pi$. Fläche $AGmP = \frac{4}{3}\pi.A'P \times Pm - \frac{4}{3}\pi.AA' \times AG$ (§. 93.),

$$= \tfrac{4}{3}\pi\sqrt{p(\tfrac{1}{4}p + x)^3} - \tfrac{1}{6}\pi p^2.$$

§. 97. Berechnung der Oberflächen runder Körper, welche durch die Umdrehung der Kegelschnitte um ihre Axen beschrieben werden.

1.) Wenn sich die Parabel um ihre Axe dreht, und auf derselben die Abscissen x von ihrem Scheitel an gerechnet werden; so ist

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + y^2}\ (\S.\ 95.) = \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + px},$$

und daher $dS = 2\pi dx\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + px}$,

$$S = C + \frac{4\pi}{3p}(\tfrac{1}{4}p^2 + px)^{\frac{3}{2}},$$

$$= C + \tfrac{4}{3}\pi\sqrt{p(\tfrac{1}{4}p + x)^3}.$$

Soll die Oberfläche in dem Scheitel der Parabel anfangen; so muß $S = 0$ seyn für $x = 0$, und daher $0 = C + \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{p^4}{64}}$, $C = -\frac{1}{6}\pi p^2$.

Demnach ist $S = \frac{4}{3}\pi\sqrt{p(\frac{1}{4}p + x)^3} - \frac{1}{6}\pi p^2$, wie man in dem vorhergehenden §. gefunden hat.

2.) Eine Ellipse, deren große und kleine Axe $2a$ und $2b$ seyen, drehe sich um ihre kleine Axe; so ist, wenn man die Abscissen x von dem Mittelpunkt der Ellipse an auf ihrer kleinen Axe nimmt,

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2),$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2\frac{a^2}{b^2}x,$$

$$-dy : dx = \frac{a^2}{b^2}x : y,$$

$$\overline{dy}^2 : \overline{dx}^2 = \frac{a^4}{b^4}x^2 : y^2,$$

$$\overline{ds}^2 : \overline{dx}^2 = \frac{a^4}{b^4}x^2 + y^2 : y^2,$$

$$= \frac{a^4}{b^4}x^2 + \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2) : y^2,$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\left(\left(\frac{a}{b^2}-1\right)x^2+b^2\right) : y^2,$$

$$ds : dx = \frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}x^2} : y,$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\sqrt{\frac{b^4}{a^2-b^2}+x^2} : y,$$

$$= \frac{a}{k}\sqrt{k^2+x^2} : y, \text{ wenn man } \frac{b^4}{a^2-b^2} = k^2 \text{ sezt.}$$

Also ist $2\pi y ds$ oder (§. 96.) dS $\Big\} = \frac{2a\pi}{k}\, dx\sqrt{k^2+x^2}.$

Es ist aber, wie bey der Rectification der Parabel gezeigt worden ist (§. 95.),

$$\int dx\sqrt{k^2+x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{k^2+x^2} + \tfrac{1}{2}k^2 \text{Lg.} \frac{x+\sqrt{k^2+x^2}}{k};$$ folglich ist

$$S = \frac{a\pi}{k}\, x\sqrt{k^2+x^2} + ak\pi \text{Lg.} \frac{x+\sqrt{k^2+x^2}}{k} + C,$$ wo die Constante $= o$ ist, wenn S mit x zugleich verschwinden soll.

Man suche einen Hülfswinkel v durch die Formel

$$\text{Tg.}\, v = \frac{x}{k} = \frac{x\sqrt{(a+b)(a-b)}}{b^2};$$ so ist

$$\sqrt{x^2+k^2} = k\,\text{Sec.}\, v, \text{ und } \frac{x+\sqrt{k^2+x^2}}{k} = \text{Tg.}\, v + \text{Sec.}\, v =$$

$\text{Tg.}(45^\circ + \frac{1}{2}v)$, und daher die von dem Aequator des abgeplatteten elliptischen Sphäroids an gerechnete Oberfläche

$S = ak\pi\,(\text{Tg.}\, v\,\text{Sec.}\, v + \text{Lg. Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v))$.

Für $x = b$ wird die halbe Oberfläche des abgeplatteten elliptischen Sphäroids.

$$= a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\text{Lg.}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right).$$

3.) Man nehme die große Axe der Ellipse zur Umdrehungsaxe an, und rechne auf dieser die Abscissen x, deren Anfangspunkt wiederum in den Mittelpunkt der Ellipse falle; so findet sich wie vorhin

$$ds : dx = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2} : y,$$

$$= \frac{b}{k}\sqrt{k^2-x^2} : y, \text{ wenn man } \frac{a^4}{a^2-b^2} = k^2 \text{ sezt.}$$

Also ist $dS = \frac{2\pi b}{k}\, dx\sqrt{k^2-x^2}$.

Ueber dem Durchmesser $AB = 2k$ (Fig. 40.) sey ein Kreis beschrieben,

ben, und von seinem Mittelpunkt N an sey die $NP = x$ genommen. Da x niemals größer als a wird, und k größer als a ist; so wird ein in P auf dem Durchmesser AB errichtetes Perpendickel dem Halbzirkel in M begegnen, und $PM = \sqrt{k^2 - x^2}$ seyn. Mithin ist $dx\sqrt{k^2 - x^2} = d.$ Fläche $ENPM$ (§. 91.). Es ist aber die Fläche $ENPM =$ Dreyek $PMN +$ Sector $EMN = \frac{1}{2} NP \times PM + \frac{1}{2} NE \times$ Bogen $EM = \frac{1}{2} x\sqrt{k^2 - x^2} + \frac{1}{2} k^2 \, Arc.\,\text{Sin.}\,\frac{x}{k}$. Folglich ist

$$S = C + \frac{\pi b x}{k}\sqrt{k^2 - x^2} + \pi b k \, Arc.\,\text{Sin.}\,\frac{x}{k},$$

und die Constante ist $= o$, wenn die Fläche S mit x zugleich verschwinden soll.

Sezt man $\frac{x}{k} = \text{Sin.}\, v$; so wird

$$S = \pi b k\,\text{Sin.}\, v\,\text{Cos.}\, v + \pi b k . v,$$
$$= \pi b k\,(\tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\, 2v + v).$$

Für $x = a$ wird die halbe Oberfläche des ablangen elliptischen Sphäroids

$$= b^2\pi + \frac{a^2 b\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, Arc.\,\text{Cos.}\,\frac{b}{a}.$$

4.) Eine Hyperbel, deren Queeraxe $= 2a$, und deren zugeordnete Axe $2b$ sey, beschreibe durch ihre Umdrehung um die erstere einen runden Körper; so ist, wenn man die Abscissen x von dem Mittelpunkt der Hyperbel an auf der Umdrehungsaxe nimmt,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \text{ und}$$

$$ds : dx = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}\, x^2 - a^2 : y,$$

$$= \frac{b}{k}\sqrt{x^2 - k^2} : y, \text{ wenn man } \frac{a^4}{a^2 + b^2} = k^2 \text{ sezt.}$$

Also ist $dS = \frac{2\pi b}{k}\, dx\sqrt{x^2 - k^2}$.

Es ist aber $dx\sqrt{x^2 - k^2}$ das Differential der Fläche AMP (Fig. 35.) einer gleichseitigen Hyperbel, deren halbe Axen $= k$ sind (§. 93.); und daher

$$\int dx\sqrt{x^2 - k^2} = \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2 - k^2} - \tfrac{1}{2} k^2\,\text{Lg.}\,\frac{x + \sqrt{x^2 - k^2}}{k}.$$

Folglich ist $S = \frac{\pi b x}{k}\sqrt{x^2 - k^2} + \pi b k\,\text{Lg.}\,\frac{x + \sqrt{x^2 - k^2}}{k} + C.$

Soll nun die Oberfläche an dem Scheitel der Hyperbel anfangen; so muß $S = o$ seyn für $x = a$, und man hat zu der Bestimmung von C die Gleichung

$$o = \frac{\pi ab}{k}\sqrt{a^2-k^2} + \pi bk \text{ Lg. } \frac{a+\sqrt{a^2-k^2}}{k} + C, \text{ woraus folgt}$$

$$C = -\pi b^2 - \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ Lg. } \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Man setze $\text{Sec. } v = \frac{x}{k} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}$; so ist $x^2-k^2 = k^2 \text{ Tg. } v^2$,

und $\frac{x+\sqrt{x^2-k^2}}{k}$ wird $= \text{Sec. } v + \text{Tg. } v = \text{Tg. } (45^\circ + \frac{1}{2}v)$. Folglich wird

$$S = \pi bk \text{ Sec. } v \text{ Tg. } v + \pi bk \text{ Lg. Tg. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}v)$$
$$- \pi b^2 - \pi bk \text{ Lg. } \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Sezt man noch $\frac{b}{a} = \text{Tg. } c$, so daß c dem halben Asymptotenwinkel gleich wird; so wird $\sqrt{a^2+b^2} = a \text{ Sec. } c$, und

$$\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \text{Tg. } c + \text{Sec. } c = \text{Tg. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}c)$$

$k = a \text{ Cos. } c$, $bk = a^2 \text{ Sin. } c$, Folglich ist

$$S = \pi a^2 \text{ Sin. } c \text{ Sec. } v + \pi a^2 \text{ Sin. } c \text{ Lg. Tg. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}v)$$
$$- \pi a^2 \text{ Tg. } c^2 - \pi a^2 \text{ Sin. } c \text{ Lg. Tg. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}c),$$
$$= \pi a^2 \text{ Sin. } c \text{ (Sec. } v \text{ Tg. } v - \text{Sec. } c \text{ Tg. } c)$$
$$+ \pi a^2 \text{ Sin. } c \text{ Lg. } \frac{\text{Tg. } (45^\circ + \frac{1}{2}v)}{\text{Tg. } (45^\circ + \frac{1}{2}c)}.$$

§. 98. Ein Kreis $GEFD$ (Fig. 41.) drehe sich um eine in seiner Ebene und ausserhalb des Kreises liegende Axe AK. Man soll die krumme Oberfläche finden, welche von einem gegebenen Bogen dieses Kreises durch eine volle Umdrehung beschrieben wird.

Man ziehe durch des Kreises Mittelpunkt C die FGB auf die Axe AK senkrecht, welche den Kreis in F und G schneide. Ferner ziehe man die auf AK senkrechte Ordinate $MM'P$, welche von dem mit AK parallel gezogenen Durchmesser DE in Q geschnitten werde; so ist, wenn man des Kreises Halbmesser $CG = r$, die $CB = a$, $BP = x$, $PM = y$ sezt, $y = a + \sqrt{r^2-x^2}$, oder $(y-a)^2 = r^2 - x^2$. Ebenso findet sich $PM' = a - \sqrt{r^2-x^2}$, oder, wenn man $PM' = y$ sezt, $y - a = -\sqrt{r^2-x^2}$; mithin wie oben: $(y-a)^2 = r^2 - x^2$. Aus dieser Gleichung erhält man

$$2(y-a)\frac{dy}{dx} = -2x,$$
$$-dy : dx = x : y-a,$$
$$dy^2 : dx^2 = x^2 : (y-a)^2,$$

$$\left.\begin{matrix}\overline{dy}^2 + \overline{dx}^2 \\ \overline{ds}^2\end{matrix}\right\} : \overline{dx}^2 = \left\{\begin{matrix}(y-a)^2 + x^2 \\ r^2\end{matrix}\right\} : (y-a)^2;$$

$ds : dx = r : \left\{\begin{matrix}y-a \\ a-y\end{matrix}\right\}$, je nachdem man den Bogen s von F oder G an rechnet. Sucht man nun die krumme Oberfläche, welche der Bogen FM beschreibt; so ist, weil $PM = a + \sqrt{r^2 - x^2}$,

$$dS = \frac{2r\pi}{y-a}(a + \sqrt{r^2 - x^2})\,dx,$$

$$= \frac{2ar\pi dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2r\pi dx,$$

also 1.) $S = 2ar\pi.\ Arc.\ \text{Sin.}\ \frac{x}{r} + 2\pi rx + C.$ (§. 34. n. 1.).

Weil S mit dem Bogen FM zugleich verschwinden soll; so ist $C = 0$.

Es werde die krumme Oberfläche gesucht, welche der Bogen GM' beschreibt; so ist, weil $PM' = a - \sqrt{r^2 - x^2}$,

$$dS = \frac{2r\pi}{a-y}(a - \sqrt{r^2 - x^2})\,dx,$$

$$= \frac{2ar\pi dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 2r\pi\,dx,$$

also 2.) $S = 2ar\pi.\ Arc.\ \text{Sin.}\ \frac{x}{r} - 2\pi rx + C.$

Bey der Integration von n. 1. hat man angenommen, daß der Bogen FM mit BP oder x zugleich wachse; folglich muß von den zwey Kreisbogen, welche dem Sinus $\frac{x}{r}$ entsprechen, derjenige genommen werden, welcher kleiner als ein Quadrant ist. Ebenso verhält es sich bey n. 2., wo man angenommen hat, daß der Bogen GM' mit x zugleich wachse.

Sezt man in n. 1. die Abscisse $x = r$, so erhält man die von dem Quadranten FD beschriebene krumme Oberfläche $= 2ar\pi.\ \frac{1}{2}\pi + 2r^2\pi,$

$$= ar\pi^2 + 2r^2\pi.$$

Eben so erhält man aus n. 2. die von dem Quadranten GD beschriebene krumme Oberfläche $= ar\pi^2 - 2r^2\pi$.

Demnach ist die von dem Halbzirkel FDG beschriebene krumme Oberfläche $= 2ar\pi^2$. Zieht man von dieser die von dem Bogen GM' beschriebene Oberfläche ab; so erhält man die von dem Bogen FDM' beschriebene Oberfläche

$$2ar\pi\left(\pi - Arc.\ \text{Sin.}\ \frac{x}{r}\right) + 2\pi rx.$$

Die Formel n. 1. drükt also die von dem Bogen FM, oder die von dem Bogen FDM' beschriebene Oberfläche aus, je nachdem man von den

zwey zu dem Sinus $\frac{x}{r}$ gehörigen Kreisbogen denjenigen nimmt, welcher kleiner oder größer als ein Quadrant ist.

Ebenso erhält man mittelst der Formel n. 2. die von dem Bogen GM' oder von dem Bogen GDM' beschriebene Oberfläche, je nachdem man den zu dem Sinus $\frac{x}{r}$ gehörigen Kreisbogen kleiner oder größer als einen Quadranten nimmt. Sezt man in dem Ausdruk der von dem Bogen FDM' beschriebenen Oberfläche $x = 0$; so erhält man die von dem Halbzirkel FDG beschriebenen Oberfläche $= 2ar\pi^2$, wie man vorhin gefunden hat.

Die von dem ganzen Kreis beschriebene Oberfläche ist also $4ar\pi^2 = 2r\pi . 2a\pi$, oder sie ist der krummen Oberfläche eines Cylinders gleich, welcher den beschreibenden Kreis zur Grundfläche hat, und dessen Höhe dem Umfang eines mit dem Halbmesser $CB = a$ beschriebenen Kreises gleich ist.

Wenn die Umdrehungsaxe AK den Kreis in H und $\mathcal{J}$ (Fig. 42.) schneidet; so findet man wie vorhin die von dem Bogen FM beschriebene Fläche

$$= 2ar\pi \, Arc. \, \text{Sin.} \frac{x}{r} + 2\pi . rx,$$

und die von dem Bogen FH beschriebene Fläche

$$= 2ar\pi\left(\pi - Arc. \, \text{Cos.} \frac{a}{r}\right) + 2\pi r\sqrt{r^2 - a^2}$$

Sezt man $PM' = y$; so ist $(y + a)^2 = r^2 - x^2$, woraus man, wenn der Bogen $GM' = s$ gesezt wird, erhält $\frac{ds}{dx} = \frac{r}{y+a} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Hienach ist das Differential der von dem Bogen GM beschriebenen Oberfläche.

$= 2r\pi dx - \frac{2ar\pi dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, und man findet durch das Integriren diese Oberfläche selbst $= 2\pi rx - 2ar\pi \, Arc. \, \text{Sin.} \frac{x}{r}$, wo die Constante wegfällt, weil die Oberfläche mit x zugleich verschwinden soll. Für $x = BH = \sqrt{r^2 - a^2}$ wird nun die von dem Bogen GH beschriebene Oberfläche

$$= 2\pi r\sqrt{r^2 - a^2} - 2ar\pi \, Arc. \, \text{Cos.} \frac{a}{r}.$$

Man mache den Kreisabschnitt HgJ dem Abschnitt HGJ gleich; so wird der nach einer vollen Umdrehung von der mondförmigen Fläche $HDFEJgH$ beschriebene Körper dem Ueberschuß des von dem Kreisabschnitts JFH beschriebenen Körpers über den Körper, welcher zu gleicher Zeit von dem auf der anderen Seite der Umdrehungsaxe AK liegenden Abschnitt JGH beschrieben wird, gleich seyn. Die ganze Oberfläche dieses Körpers ist der doppelten Summe der von den Kreisbogen FDH und GH beschriebenen Oberflächen gleich, und daher

$$= 4ar\pi^2 - 8ar\pi \, Arc. \, \text{Cos.} \frac{a}{r} + 8r\pi\sqrt{r^2 - a^2}.$$

Die doppelte Differenz der genannten Oberflächen ist $= 4ar\pi^2$.

Sezt man in dem zulezt gefundenen Ausdruk $a = 0$; so findet sich die ganze durch die Umdrehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser beschriebene Oberfläche $8r^2\pi =$ der doppelten Oberfläche einer mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel, wie es auch seyn muß, weil jeder der zwey Halbzirkel eine Kugel beschreibt.

§. 99. Endlich sey der Inhalt des runden Körpers zu bestimmen, welcher durch die Umdrehung der Fläche *CBMP* (Fig. 37. 38.) um die Axe *AK* beschrieben wird.

Man lasse die Abscisse *AP* um *PP'* wachsen, und beschreibe die Rechtecke *PR*, *P'R'* in und um die Figur; so wächst der Inhalt des Körpers um das Stük, welches von der Fläche *PMM'P'* beschrieben wird, und größer ist, als der Inhalt des Cylinders, welcher von dem in die Figur beschriebenen Rechtek *PR* beschrieben wird. Eben dieses Stük ist aber kleiner als der Inhalt des Cylinders, welchen das um die Figur beschriebene Rechtek *P'R'* beschreibt; folglich ist, wenn man den Inhalt des von der Fläche *CBMP* beschriebenen Körpers $= V$ sezt, und die Ordinaten *PM* von *P* bis *P'* wachsen

$$\Delta V > \pi y^2 \Delta x,$$
$$< \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x.$$

Wenn aber die Ordinaten von *P* bis *P'* abnehmen; so ist

$$\Delta V < \pi y^2 \Delta x$$
$$> \pi (y - \Delta y)^2 \Delta x.$$

Folglich ist in beyden Fällen, wenn die Abscissen x auf der Umdrehungsaxe genommen werden,

1.) $dV = \pi y^2 dx$, $V = \pi \int y^2 dx$,

und man findet, wenn die krumme Linie *BM* gegeben, mithin y eine gegebene Function von x ist, den Inhalt V des Körpers mittelst der Integralrechnung.

Weil $d.xy^2 = y^2 dx + 2xydy$; so ist $\pi y^2 dx = \pi d.x^2 - 2\pi xydy$, mithin auch 2.) $V = \pi xy^2 - 2\pi \int xydy$.

An derselben Axe *AK* der Abscissen sey eine andere krumme Linie *bm* so verzeichnet, daß jede ihrer Ordinaten *Pn* der dritten geometrischen Proportionallinie zu einer beliebigen constanten Linie c und zu der correspondirenden Ordinate *PM* der ersten krummen Linie *BM* gleich sey; so wird man haben

$$c : y = y : \left\{\begin{matrix} Pm \\ y' \end{matrix}\right\},\ y^2 = cy',$$

$$\left\{\begin{matrix} \pi y^2 dx \\ dV \end{matrix}\right\} = c\pi y' dx = c\pi.\ d.\ \text{Fläche } CbmP \text{ (§. 91.).}$$

Folglich ist $V = c\pi$. Fläche $CbmP$, und die Bestimmung des Inhalts V des Körpers reducirt sich auf Quadratur der gegebenen krummen Linie bm.

Man ziehe durch M und m die Parallelen ME, me mit AK, welche den Verlängerungen der Ordinate BC in E in e begegnen. Da $c : PM = PM : pm$; so ist

$$\pi.\ CP \times \overline{PM}^2 = c\pi.\ CP \times pm.$$

Aber $V = c\pi$ Fläche $CbmP$;

folglich verhält sich der Inhalt V des Körpers zu einem Cylinder, welcher mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat, wie die Fläche $CbmP$ zu dem Rechtek $CPme$.

Die krumme Linie ABM (Fig. 44.) sey z. B. eine Parabel, und AK ihre Are; so verhält sich $AC : AP = \overline{CB}^2 : \overline{PM}^2$, d. i. wenn die Ordinaten Cb, Pm wie vorhin bestimmt werden, $= Cb : Pm$. Die Punkte b, m liegen also auf einer durch den Scheitel A der Parabel gehenden geraden Linie Abm. Folglich verhält sich der Inhalt des durch die Fläche AMP beschriebenen paraboloischen Conoids zu dem Inhalt eines Cylinders, welcher mit demselben einerley Grundfläche und Höhe hat, wie das Dreyek APm zu dem Rechtek aus AP und Pm, d. i. wie 1 : 2. Ferner verhält sich der Inhalt des durch die Fläche $BCPM$ beschriebenen abgekürzten Conoids zu einem Cylinder welcher mit dem abgekürzten Conoid einerley Höhe CP, und $\left\{\begin{matrix} PM \\ CB \end{matrix}\right\}$ zum Halbmesser seiner Grundfläche hat, wie das Trapezium $CPmb$ zu dem Rechtek aus $\left\{\begin{matrix} CP \text{ und } Pm \\ CP \text{ und } Cb \end{matrix}\right\}$. Nun ist aber das Trapezium $CPmb$ das arithmetische Mittel zwischen den zwey genannten Rechtecken; folglich ist der Inhalt des abgekürzten paraboloischen Conoids das arithmetische Mittel zwischen den um und in dasselbige beschriebenen Cylindern.

Weil der durch die Umdrehung der Figur $CBMP$ (Fig. 43.) um die Are AK beschriebene Körper sich zu dem von dem Rechtek EP beschriebenen Cylinder verhält, wie die Fläche $CbmP$ zu dem Rechtek eP; so ist auch umgekehrt die Quadratur der krummen Linie bm durch die Cubatur des durch die Figur $CBMP$ beschriebenen Körpers gegeben. Da nemlich $c : PM = PM : Pm$; so ist, wenn die krumme Linie bm gegeben ist, die correspondirende Ordinate PM der krummen Linie BM gegeben. Kann man nun den Inhalt des durch die Umdrehung der ebenfalls gegebenen Figur $CBMP$ um die Are AK beschriebenen Körpers finden; so findet man mittelst desselben die Fläche $CbmP$.

Sey z. B. Am (Fig. 45.) eine Parabel, deren Are Ae, und Scheitel A. Man ziehe AK auf Ae in A senkrecht, und setze die willkührliche

constante Linie c dem Parameter p dieser Parabel gleich; so muß sich verhalten

$$p : PM = PM : Pm.$$

Aber $p : \left\{\begin{matrix} me \\ AP \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} me \\ AP \end{matrix}\right\} : Pm$, vermöge der Eigenschaft der Parabel;

folglich ist $PM = AP$, und die krumme Linie BM der 43sten Figur verwandelt sich in eine durch den Scheitel A der Parabel gehende gerade Linie AM. Es drehe sich die Figur $AEMP$ (Fig. 45.) um die Axe AK; so beschreibt das Rechtek EP einen Cylinder und das Dreyek AMP einen Kegel, welcher mit dem Cylinder einerley Grundfläche und Höhe hat. Da nun der Kegel der dritte Theil dieses Cylinders ist; so ist die Fläche AmP der dritte Theil des Rechteks Pe, und die Fläche Ame ist $\frac{2}{3}$ dieses Rechteks, wie man in dem 94sten §. gefunden hat.

§. 190. Cubatur runder Körper, welche durch die Umdrehung der Kegelschnitte beschrieben werden.

1.) Wenn eine Parabel, deren Parameter $= p$ ist, sich um ihre Axe dreht; so ist nach dem vorhergehenden §.

$$dV = \pi y^2 dx = \pi p x dx,$$

$$V = \tfrac{1}{2} \pi p x^2 + C.$$

Soll V mit x zugleich verschwinden; so ist $C = 0$, und der Inhalt des paraboliſchen Conoids ist $= \frac{1}{2} \pi p x^2 = \frac{1}{2} \pi y^2 . x =$ der Hälfte des um das Conoid beschriebenen Cylinders, wie man in dem vorhergehenden §. gefunden hat.

Soll aber der Körper nicht an dem Scheitel der Parabel, sondern an einer Ebene anfangen, welche die Axe in dem gegebenen Abstand a von dem Scheitel senkrecht schneidet; so muß $V = 0$ seyn für $x = a$, und man hat zu der Bestimmung von C die Gleichung $0 = \frac{1}{2} \pi p a^2 + C$. Also wird jezt $V = \frac{1}{2} \pi p (x^2 - a^2) = \frac{1}{2} \pi (px + ap)(x - a)$. Es sind aber px und ap die Quadrate der den Abscissen x und a entsprechenden Ordinaten der Parabel; folglich ist der Inhalt des abgekürzten paraboliſchen Conoids der halben Summe der um und in dasselbige beschriebenen Cylinder gleich, übereinstimmend mit dem vorhergehenden §.

Die Parabel Am (Fig. 45.) drehe sich um die gerade Linie, welche sie in ihrem Scheitel A berührt. Man ziehe Ae auf AK senkrecht, und vollende das Rechtek $APme$; so ist $\left\{\begin{matrix} me^2 \\ \overline{AP}^2 \end{matrix}\right\} = p . Ae = p . Pm$, oder wenn man $AP = x$, $Pm = y$ sezt, $\frac{x^2}{p} = y$. Der Inhalt des durch die Fläche AmP beschriebenen Körpers heiße V; so hat man

$$dV = \pi \frac{x^4}{p^2} dx, \text{ und } V = C + \tfrac{1}{5} \frac{\pi x^5}{p^2}, \text{ wo } C = 0 \text{ ist, wenn } V = 0$$

seyn soll für $x = 0$.

Folglich ist der Inhalt des durch die Fläche AmP beschriebenen Körpers $= \frac{1}{5} \frac{\pi x^4}{p^2} x = \frac{1}{5} \pi . y^2 x$, oder gleich dem fünften Theil eines Cylin-

ders, welcher mit dem Conoid einerley Grundfläche und Höhe hat, und der Inhalt des von der Fläche A*me* beschriebenen Körpers ist $\frac{4}{5}$ dieses Cylinders.

Für die Kegelschnitte ist $y^2 = px - \frac{p}{2a} x^2$, und daher, wenn $2a$ die Umdrehungsaxe ist,

$$dV = \pi . pxdx - \pi \frac{p}{2a} x^2 dx,$$

$$V = C + \tfrac{1}{2}\pi . px^2 - \tfrac{1}{3}\pi . \frac{p}{2a} x^3,$$ wo wiederum $C = 0$ seyn muß, wenn der Körper an dem Scheitel des Kegelschnitts anfangen soll.

Sezt man $p = 2a$; so geht der Kegelschnitt in einem mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreis über, und man findet den Inhalt eines Kugelabschnitts, dessen Höhe x ist, $= \pi . ax^2 - \frac{1}{3}\pi . x^3$. Wenn also durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen ein Sphäroid, und um die Umdrehungsaxe als Durchmesser eine Kugel beschrieben wird; so verhält sich jeder durch eine auf der Umdrehungsaxe senkrechte Ebene gebildeter Abschnitt des Sphäroids zu dem correspondirenden Abschnitt der Kugel, wie der Parameter der Umdrehungsaxe zu der Umdrehungsaxe, oder wie das Quadrat der auf der Umdrehungsaxe senkrechten Axe zu dem Quadrat der Umdrehungsaxe.

Sezt man in dem Ausdruk des Kugelabschnitts $x = 2a$; so findet man den Inhalt einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel $= \frac{4}{3}\pi . a^3 = \frac{2}{3}$ des um die Kugel beschriebenen Cylinders.

Man seze die Axen der Ellipse $= 2b$ und $2a$; so ist, wenn $2a$ die Umdrehungsaxe ist, der Inhalt des Sphäroids $= \frac{4}{3}\pi . \frac{b^2}{a^2} a^3 = \frac{4}{3}\pi . ab^2 = \frac{4}{3}\pi \frac{a}{b} . b^3$. Ist aber $2b$ die Umdrehungsaxe; so ist der Inhalt des Sphäroids $= \frac{4}{3}\pi . \frac{a^2}{b^2} b^3 = \frac{4}{3}\pi . a^2 b = \frac{4}{3}\pi . \frac{b}{a} . a^3$. Also verhält sich jedes durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axe beschriebene Sphäroid zu einer um den Durchmesser seines Aequators beschriebenen Kugel, wie die Umdrehungsaxe zu der anderen Axe, und jedes solches Sphäroid ist $\frac{2}{3}$ des darum beschriebenen Cylinders.

Wenn eine Kugel mit zwey parallelen Ebenen geschnitten wird, und die zwischen einem der Endpunkte der Axe und den schneidenden Ebenen liegende Segmente der Axe x und x' heißen; so ist der Inhalt des zwischen den zwey Ebenen liegenden Kugelstüks

$$= \pi (ax'^2 - \tfrac{1}{3} x'^3 - ax^2 + \tfrac{1}{3} x^3),$$
$$= \pi (x' - x) (ax' + ax - \tfrac{1}{3} (x'^2 + xx' + x^2)).$$

Es ist aber, wenn die den Abscissen x', x entsprechende Ordinaten des Kreises mit y' und y bezeichnet werden,

$$3y'^2 = 6ax' - 3x^2,$$
$$3y^2 = 6ax - 3x^2,$$

und $(x'-x)^2 = x'^2 - 2xx' + x^2$;

folglich ist $3y'^2 + 3y^2 + (x'-x)^2 = 6ax' + 6ax - 2(x'^2 + xx' + x^2)$

oder $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3y'^2 + 3y^2 + (x'-x)^2}{2}\right) = ax' + ax - \frac{1}{3}(x'^2 + xx' + x^2)$,

und daher ist der Inhalt eines jeden zwischen zwey parallelen Ebenen liegenden Kugelstüks, dessen Höhe $= x'-x$ oder h ist,

$$= \frac{1}{3}\pi . h \left(\frac{3y'^2 + 3y^2 + h^2}{2}\right).$$

Es seyen y' und y die Halbmesser der kreisförmigen Durchschnitte eines elliptischen Sphäroids, welche entstehen, wenn das Sphäroid senkrecht auf seine Umdrehungsaxe geschnitten wird, h sey der Abstand der schneidenden Ebenen von einander, oder die Höhe des herausgeschnittenen Stüks; so findet sich, wenn die Umdrehungsaxe $2a$ und ihr Parameter p heißt, der Inhalt eines jeden zwischen zweyen auf der Umdrehungsaxe senkrechten Ebenen liegenden Stüks eines durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre

Axe beschriebenen Sphäroids $= \frac{1}{3}\pi . h \left(\frac{3y'^2 + 3y^2 + \frac{p}{2a} . h^2}{2}\right)$.

Man setze in dem für den Abschnitt V eines elliptischen Sphäroids gefundenen Ausdruk die Axe $2a$ negativ; so erhält man den Inhalt eines hyperbolischen Conoids, welches durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre Queeraxe beschrieben wird, und x zur Höhe hat,

$$= \frac{1}{2}\pi . px^2 + \frac{1}{3}\pi . \frac{p}{2a} x^3.$$

Mit Beybehaltung der bey dem elliptischen Sphäroid gebrauchten Benennungen findet sich der Inhalt des abgekürzten hyperbolischen Conoids

$$= \frac{1}{3}\pi . h \left(\frac{3y'^2 + 3y^2 - \frac{p}{2a} h^2}{2}\right).$$

Es sey MAM' (Fig. 46.) eine gleichseitige Hyperbel, deren Scheitel A, und deren Asymptoten CD und CE seyen. Man ziehe AB, MP auf die Asymptote DC senkrecht; so ist, wenn man $CB = c$, $CP = x$, $PM = y$ sezt, $xy = c^2$, und, wenn man den Inhalt des durch die Umdrehung des hyperbolischen Trapeziums $ABPM$ um die Asymptote CD beschriebenen Körpers $= V$ sezt,

$$dV = \pi \frac{c^4}{x^2} dx, \quad V = C - \pi . \frac{c^4}{x}.$$

Es soll $V = 0$ seyn für $x = CB = c$; folglich muß seyn $0 = C - \pi . c^3$, und daher

$$V = \pi . c^3 - \frac{\pi . c^4}{x} = \pi . c^3 \frac{(x-c)}{x}.$$

Man ziehe AK auf CE senkrecht, und durch K und P eine gerade Linie KP, welche die AB in L schneide; so verhält sich

$$\left.\begin{matrix} CP \\ x \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} BP \\ x-c \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} CK \\ c \end{matrix}\right\} : BL.$$

Folglich ist der Inhalt des durch die Umdrehung der Fläche $ABPM$ um die Axe CD beschriebenen Körpers einem Cylinder gleich, welcher AB zum Halbmesser seiner Grundfläche, und BL zur Höhe hat. Je größer BP wird, desto mehr nähert sich die BL der BA, von welcher sie durch die Vergrößerung von BP um weniger als jede gegebene Größe kann verschieden gemacht werden. Also ist ein Cylinder, welcher AB zum Halbmesser seiner Grundfläche, und eben diese Linie zur Höhe hat, die Gränze, welcher sich der gegen D hin unbestimmt fortlaufende Körper desto mehr nähert, je weiter er fortgesezt wird, ohne jemals diese Gränze zu erreichen.

Verlangt man den Körper, welcher durch die Umdrehung der Fläche $MPP'M'$ um dieselbe Axe CD beschrieben wird; so muß in dem oben für V gefundenen Ausdruk die Constante C so bestimmt werden, daß $V = 0$ wird für $x = CP' = x'$. Es wird also jezt $0 = C - \pi . \frac{c^4}{x'}$, und $V = \pi c^4 \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}\right) = \pi c^4 . \frac{x - x'}{xx'}$. Sezt man in diesem Ausdruk $x = CB = c$; so erhält man den Inhalt des durch die Umdrehung der Fläche $ABP'M'$ beschriebenen Körpers $= \pi . c^3 \frac{c - x'}{x'}$. Man ziehe durch K und P eine gerade Linie, welche der Verlängerung von AB in L' begegne; so verhält sich

$$\left\{\begin{matrix} CP' \\ x' \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} BP' \\ c - x' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} CK \\ c \end{matrix}\right\} : BL'.$$

Folglich ist der Inhalt des durch die Fläche $ABP'M'$ beschriebenen Körpers einem Cylinder gleich, welcher AB zum Halbmesser seiner Grundfläche, und die BL' zur Höhe hat. Dieser Körper wächst also, wenn BP' wächst, oder CP' abnimmt, über alle Gränzen.

Achtes Capitel.

Von der Bestimmung der Tangenten und der Krümmungshalbmesser krummer Linien, von ihrer Quadratur, und von der Bestimmung der Oberflächen und des Inhalts runder Körper, wenn die Ordinaten von einem Punkt ausgehen.

§. 101. Für die krumme Linie BM (Fig. 47.) sey eine Gleichung zwischen dem Winkel $AFM = v$, und der Distanz $FM = z$ (eine so genannte Polargleichung in Beziehung auf den Pol F) gegeben. Man nehme auf der FA, von welcher die Winkel AFM oder von v an gerechnet werden, einen Punkt A nach Belieben als Anfangspunkt der

Abscissen AP oder x zu den auf AF senkrechten Ordinaten PM oder y an, und setze $AF = a$; so wird man haben

$$\left.\begin{matrix} \text{AP} \\ x \end{matrix}\right\} = AF - FP = a - z \operatorname{Cos.} v,$$

$$\left.\begin{matrix} \text{P}M \\ y \end{matrix}\right\} = z \operatorname{Sin.} v.$$

Die gerade Linie MT berühre die krumme Linie BM in M.

$$\text{Da Tg.}\, FMT = \text{Tg.}(FMP + PMT) = \frac{\text{Tg.}\, FMP + \text{Tg.}\, PMT}{1 - \text{Tg.}\, FMP . \text{Tg.}\, PMT},$$

und $FMP = R - AFM = R - v$,

$$\text{Tg.}\, PMT = \frac{dx}{dy} \text{ (§. 66.)};$$

$$\text{so ist Tg.}\, FMT = \frac{\text{Cotg.}\, v + \frac{dx}{dy}}{1 - \frac{dx}{dy} \text{Cotg.}\, v} = \frac{\text{Cos.}\, v + \frac{dx}{dy} \text{Sin.}\, v}{\text{Sin.}\, v - \frac{dx}{dy} \text{Cos.}\, v},$$

$$= \frac{\frac{dy}{dv} \text{Cos.}\, v + \frac{dx}{dv} \text{Sin.}\, v}{\frac{dy}{dv} \text{Sin.}\, v - \frac{dx}{dv} \text{Cos.}\, v}.$$

Es ist aber, wenn man obige Gleichungen für x und y differentiirt, in welchen diese zwey veränderliche Größen Functionen von v sind,

$$\frac{dx}{dv} = - \frac{dz}{dv} \text{Cos.}\, v + z \text{Sin.}\, v,$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dz}{dv} \text{Sin.}\, v + z \text{Cos.}\, v.$$

Folglich ist, wenn man diese Werthe in den für Tg. FMT gefundenen Ausdruk sezt,

1.) $\text{Tg.}\, FMT = z \frac{dv}{dz}$, und, wenn man die Normallinie MN zieht,

2.) $\left.\begin{matrix} \text{Cotg.}\, FMT \\ \text{Tg.}\, FMN \end{matrix}\right\} = \frac{dz}{zdv}$.

Eine durch den Pol F senkrecht auf den Radius Vector FM gezogene gerade Linie nt werde von der Tangente in dem Punkt t, und von der Normallinie in n geschnitten; so

heißt auch hier das Segment Ft die Subtangente, und das Segment Fn die Subnormallinie. Es ist also

3.) die Subtangente $Ft = FM \text{ Tg. } FMT = z^2 \frac{dv}{dz}$ (n. 1.),

4.) die Subnormallinie $Fn = FM \text{ Tg. } FMN = \frac{dz}{dv}$ (n. 2.).

Weil $\frac{dx}{dv} = -\frac{dz}{dv} \text{ Cos. } v + z \text{ Sin. } v$,

und $\frac{dy}{dv} = \frac{dz}{dv} \text{ Sin. } v + z \text{ Cos. } v$; so ist

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \overline{\text{Cos. } v}^2 - 2z \frac{dz}{dv} \text{ Sin. } v \text{ Cos. } v + z^2 \overline{\text{Sin. } v}^2,$$

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \text{Sin. } v^2 + 2z \frac{dz}{dv} \text{Sin. } v \text{ Cos. } v + z^2 \text{ Cos. } v^2,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{mithin } \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 \\ \text{oder (§. 74.) } \left(\frac{ds}{dv}\right)\end{array}\right\} = \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + z^2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Also ist 5.) das Differential des Bogens } BM \\ \text{oder } ds\end{array}\right\} = dv \sqrt{\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + z^2}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Aus n. 1. ergiebt sich } 1 + \overline{\text{Tg. } FMT}^2 \\ \overline{\text{Sec. } FMT}^2\end{array}\right\} = 1 + z^2 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2,$$

$$= \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \left(\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + z^2\right),$$

$$= \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \left(\frac{ds}{dv}\right)^2, \text{ (n. 5.)}.$$

Also ist $\text{Sec. } FMT = \frac{ds}{dz}$,

oder 6.) $\text{Cos. } FMT = \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2 \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}}$.

Eben so findet man aus n. 2.

7.) $\text{Sin. } FMT = z \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{z^2} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}}$.

Ein aus dem Pol F auf die Tangente MT gefälltes Perpendickel FQ heiße p; so ist

8.) $p = FM \text{ Sin. } FMT = z^2 \frac{dv}{ds}$ (n. 7.), und daher

$$z^2 = p\frac{ds}{dv},\quad z^4 = p^2\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = p^2\left(\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + z^2\right) \text{(n. 5.)}.$$

Hieraus findet sich 9.) $\frac{dv}{dz} = \frac{p}{z\sqrt{z^2 - p^2}}$.

Wenn also für eine krumme Linie BM eine Gleichung zwischen dem Radius Vector FM oder z und dem Perpendickel FQ oder p aus dem Pol F auf die an den Punkt M der krummen Linie gezogene Tangente Mt gegeben, mithin p eine gegebene Function von z ist; so findet man eine Gleichung zwischen v und z, wenn man die Gleichung n. 9. integriren kann.

Man setze den Winkel ANM oder $AFQ = w$; so ist

$$w = AFM - MFQ = v - (R - FMT),$$

und $\frac{dw}{dv} = 1 + \frac{d\,FMT}{dv}$.

$$\text{Aber Sin. } FMT = \frac{FQ}{FM} = \frac{p}{z},$$

$$FMT = Arc.\,\text{Sin. } \frac{p}{z},$$

$$d.FMT = \frac{d.\frac{p}{z}}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{z^2}}} \text{ (§. 34. n. 1.)},$$

$$\frac{d.FMT}{dv} = \frac{z\frac{dp}{dv} - p\frac{dz}{dv}}{z\sqrt{z^2 - p^2}},$$

$$= \frac{\frac{dp}{dv}}{\sqrt{z^2 - p^2}} - \frac{p}{z\sqrt{z^2 - p^2}} \cdot \frac{dz}{dv},$$

$$= \frac{\frac{dp}{dv}}{\sqrt{z^2 - p^2}} - 1 \text{ (n. 9.)};$$

folglich ist $\frac{dw}{dv} = \frac{\frac{dp}{dv}}{\sqrt{z^2 - p^2}}$,

oder 10.) $\frac{dw}{dp} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - p^2}} = \frac{1}{MQ}$.

Da $\left(\frac{ds}{dv}\right) = \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + z^2$ (n. 5.); so ist

$$1 = \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + z^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + \frac{p^2}{z^2} \text{ (n. 8.)},$$

$$z^2 - p^2 = z^2\left(\frac{dz}{ds}\right)^2, \text{ und daher}$$

11.) $$\frac{ds}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - p^2}}.$$

Ist eine Gleichung zwischen p und z gegeben; so findet man durch die Integration dieser Formel den Bogen s der krummen Linie.

Weil $ds : dz = z : \sqrt{z^2 - p^2}$ (n. 11.),

und $dp : dw = \sqrt{z^2 - p^2} : 1$ (n. 10.),

$$dz : dp = 1 : \frac{dp}{dz},$$

so ist $ds : dw = z : \frac{dp}{dz}$.

Es ist aber $\frac{ds}{dw}$ der Krümmungshalbmesser an dem Punkt M (§. 82.); folglich ist

12.) der Krümmungshalbmesser $= z\frac{dp}{dz}$.

Weil $\left.\begin{matrix} ANM \\ w \end{matrix}\right\} = AFM - FMN$, und Tg. $FMN =$ Cotg. $FMT = \frac{dz}{zdv}$ (n. 2.); so ist auch

$$w = v - Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{dz}{zdv},$$

und $$\frac{dw}{dv} = 1 - \frac{d.\,Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{dz}{zdv}}{dv}.$$

Man setze zur Abkürzung $\frac{dz}{zdv} = t$; so ist nach §. 34. n. 3.

$$\frac{dw}{dv} = 1 - \frac{\frac{dt}{dv}}{1 + t^2}.$$

Es findet sich aber $\frac{dt}{dv} = \frac{d.\frac{1}{z}\frac{dz}{dv}}{dv}$,

$$= -\frac{1}{z^2}\left(\frac{dz}{dv}\right) + \frac{1}{z}\frac{d^2z}{dv^2} \text{ (§. 36.)},$$

$$= \frac{z\frac{d^2z}{dv^2} - \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}{z^2},$$

und $1 + t^2 = 1 + \left(\frac{dz}{zdv}\right)^2 = \frac{z^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2}{z^2}$; folglich ist

13.) $$\frac{dw}{dv} = 1 - \frac{z\frac{d^2z}{dv^2} - \left(\frac{dz}{dv}\right)}{z^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2},$$

$$= \frac{z^2 + 2\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 - z\frac{d^2z}{dv^2}}{\left(\frac{ds}{dv}\right)^2} \text{ (n. 5.)}.$$

Demnach ist auch $\frac{dv}{dw} = \frac{\left(\frac{ds}{dv}\right)^2}{z^2 + 2\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 - z\frac{d^2z}{dv^2}}$, und, wenn

man beyderseits mit $\frac{ds}{dv}$ multiplicirt,

14.) $$\left.\frac{ds}{dw}\right\} = \frac{\left(\frac{ds}{dv}\right)}{z^2 + 2\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 - z\frac{d^2z}{dv^2}},$$

oder der Krümmungshalbmesser r

welchen Ausdruk man auch auf folgende Art findet.

Wenn der Krümmungshalbmesser und die Ordinate y als Functionen der Abscisse x betrachtet werden; so ist nach §. 81. n. 1.

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{-\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Sollen aber x, y, s, r als Functionen von v betrachtet werden; so ist nach §. 43. pag. 83.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dv^2}}{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2} - \frac{\frac{dy}{dv}\cdot\frac{d^2x}{dv^2}}{\left(\frac{dx}{dv}\right)^3}, \text{ und } \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 \text{ ist } = \left(\frac{ds}{dv}\right)^3\left(\frac{dv}{dx}\right)^3.$$

Folglich wird jezt

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dv}\right)^3}{\frac{dy}{dv}\frac{d^2x}{dv^2} - \frac{dx}{dv}\frac{d^2y}{dv^2}}.$$

Da nun, wie man zu Anfang dieses §. gesehen hat,

$$\frac{dx}{dv} = -\frac{dz}{dv}\,\text{Cos.}\,v + z\,\text{Sin.}\,v,$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dz}{dv}\,\text{Sin.}\,v + z\,\text{Cos.}\,v$$

$$\text{so ist } \frac{d^2x}{dv^2} = -\frac{d^2z}{dv^2}\,\text{Cos.}\,v + 2\frac{dz}{dv}\,\text{Sin.}\,v + z\,\text{Cos.}\,v,$$

$$\text{und } \frac{d^2y}{dv^2} = \frac{d^2z}{dv^2}\,\text{Sin.}\,v + 2\frac{dz}{dv}\,\text{Cos.}\,v - z\,\text{Sin.}\,v.$$

Substituirt man diese Werthe in dem so eben gefundenen Ausdruk des Krümmungshalbmessers; so erhält ebenfalls die Gleichung n. 14.

Aus dem Mittelpunkt *m* des Krümmungskreises an *M*, welcher immer auf der Normallinie *MN* liegt, sey ein Perpendickel *mq* auf den Radius Vector *FM* gefällt; so ist

$$Mq = Mm\,\text{Cos.}\,FMN = Mm\,\text{Sin.}\,FMT,$$

$$= rz\frac{dv}{ds}\ \text{(n. 7.)}, = \frac{z\left(\frac{ds}{dv}\right)}{z^2 + 2\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 - z\frac{d^2z}{dv^2}}\ \text{(n. 14.)}$$

Also ist 15.) $$Mq = \frac{\left(\frac{ds}{dv}\right)^2}{z + 2z\left(\frac{dz}{zdv}\right)^2 - \frac{d^2z}{dv^2}},$$

$$= \frac{z^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)}{z + 2z\left(\frac{dz}{zdv}\right)^2 - \frac{d^2z}{dv^2}}\ \text{(n. 5.)},$$

$$= \frac{z\left(1 + \left(\frac{dz}{zdv}\right)^2\right)}{1 + 2\left(\frac{dz}{zdv}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{d^2z}{dv^2}}.$$

Das

Das Doppelte hievon ist die mit dem Radius Vector zusammenfallende Chorde des Krümmungskreises.

§. 102. Um die Anwendung dieser Ausdrücke zu zeigen, sey BM (Fig. 47.) eine Conchoide, deren Directrix EF, und deren Pol in C sey. Man ziehe CD auf EF senkrecht, und setze $CD = a$, die Sagitte DB sey $= b$. Zieht man durch den Pol C eine gerade Linie CM, welche der Conchoide in M und M', und der Directrix EF in G begegnet; so ist vermöge der Eigenschaft dieser krummen Linie $MG = GM' = DB = b$. Man setze den Winkel $BCM = v$, und CM oder $CM' = z$; so ist $CG = a \operatorname{Sec.} v$, mithin $CM = a \operatorname{Sec.} v + b$, $CM' = a \operatorname{Sec.} v - b$, und daher $z = a \operatorname{Sec.} v \pm b$, wo das obere Zeichen für die obere, das untere Zeichen für die untere Conchoide gilt.

Es ist also $\frac{dz}{dv} = a \operatorname{Sec.} v \operatorname{Tg.} v$ (§. 30. n. 4.),

$= (z \mp b) \operatorname{Tg.} v = CG \operatorname{Tg.} BCM.$

An den Punkt M der Conchoide sey eine Normallinie Mn gezogen, welche der auf dem Radius Vector CM in C senkrechten CH in n begegne; so ist die Subnormallinie $Cn = \frac{dz}{dv}$ (§. 101. n. 4.). Da nun für die Conchoide $Cn = CG. \operatorname{Tg.} BCM$; so ist die gerade Linie Gn mit BC parallel. Und weil so wohl $CM - BD$ als $CM' + BD = CG$; so ist die Subnormallinie Cn den auf demselben Radius Vector CM liegenden Punkten M, M' der Conchoide gemeinschaftlich. Man kann also auf folgende Art an jeden gegebenen Punkt M der oberen Conchoide, und an jeden von dem Pol C verschiedenen Punkt M' der unteren Conchoide eine Normallinie, mithin auch eine Tangente ziehen. Man ziehe an den gegebenen Punkt M, M' den Radius Vector CM, CM', welcher der Directrix EF in G begegne, durch G eine Parallele Gn mit CB, welche von dem auf dem Radius Vector in C errichteten Perpendickel CH in n geschnitten werde, endlich ziehe man aus dem Punkt n die geraden Linien nM, nM' an die gegebenen Punkte der Conchoide; so werden diese die gesuchten Normallinien seyn, und die durch M, M' auf CM, CM' senkrecht gezogenen geraden Linien Mt, $M't'$ werden die Conchoide in M, M' berühren. Wie die Lage der Tangente an dem Pol C gefunden werden könne, ist in dem 79sten §. pag. 142. gezeigt worden.

In der Archimedeischen Spirallinie $FMAM'$ (Fig. 48.) verhält sich der Radius Vector FM zu der gegebenen geraden Linie FA wie der Winkel AFM zu vier rechten Winkeln; folglich ist, wenn man $FA = a$, $FM = z$ sezt, und den veränderlichen Winkel AFM durch die Länge v eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogens mißt, $z = \frac{av}{2\pi}$. Hieraus erhält man $\frac{dz}{dv} = \frac{a}{2\pi} =$ der Subnormallinie Fn (§. 101. n. 4.), welche also constant ist. Soll an den gegebenen Punkt M der Spirallinie eine Tangente gezogen werden; so ziehe man auf derjenigen Seite des Radius Vector FM, auf welcher die nächst größeren Radii Vectores liegen, durch F eine gerade Linie FH auf FM senkrecht, nehme auf ihr die Fn gleich der vierten geometrischen Proportionallinie zu dem Umfang eines Kreises, sei-

nem Halbmesser, und zu der gegebenen geraden Linie FA, und ziehe die nM; so ist diese eine Normallinie, und die auf ihr senkrechte Mt eine Tangente an dem Punkt M.

Weil $\frac{dz}{dv} = \frac{a}{2\pi}$; so ist $z\frac{dv}{dz} = \frac{av}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{a} = v =$ Tg. FMt (§. 101. n. 1.). Der Winkel unter welchem die Tangente den an den Berührungspunkt gezogenen Radius Vector schneidet, wächst also mit dem Radius Vector beständig, und nähert sich einem rechten Winkel als einer Gränze desto mehr, je größer der Radius Vector wird. Eben dieses folgt auch aus der Unveränderlichkeit der Subnormallinie. Für $v = o$ werden auch z und $FMt = o$; folglich berührt die AF die Spirallinie in F.

Für die logarithmische Spirallinie AM (Fig. 49.) ist, wenn die gegebene gerade Linie $FA = a$, der Radius Vector $FM = z$, der Winkel $AFM = v$ (wie bisher durch die Länge v eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogens gemessen), und irgend eine constante Zahl $= m$ gesezt wird,

$v = m$ Lg. nat. $\frac{z}{a}$, oder $z = ae^{\frac{v}{m}}$. So lange als v positiv ist, wächst, weil $e > 1$ (§. 29.) der Radius Vector FM mit dem Winkel AFM beständig. Für $v = o$ wird $z = a = FA$, und für negative Werthe von v wird z desto kleiner, je größer v wird, weil $ae^{\frac{-v}{m}} = \frac{a}{e^{\frac{v}{m}}}$. Diese krumme Linie nähert sich also, indem sie rükwarts fortgesezt wird, und unzählige Wendungen um den Pol F macht, demselben beständig, ohne ihn jemals zu erreichen.

Aus der Gleichung $v = m$ Lg. $\frac{z}{a} = m$ Lg. $z - m$ Lg. a erhält man nach §. 29. n. 4.

$\frac{dv}{dz} = \frac{m}{z}$, und $z\frac{dv}{dz} = m =$ der Tangente des Winkels FMt, unter welchem die Tangente Mt dieser Spirallinie den Radius Vector FM schneidet (§. 101. n. 1.), und welcher hienach constant ist.

Man ziehe durch den Pol F die nt auf FM senkrecht, welche von der Tangente Mt in t, und von der Normallinie Mn in n geschnitten werde; so ist

die Subnormallinie $Fn = \frac{dz}{dv} = \frac{z}{m}$ (§. 101. n. 4),

und die Subtangente $Ft = z^2\frac{dv}{dz} = mz$ (§. 101. n. 3.).

Hieraus folgt $\overline{Mn}^2 = z^2 + \frac{z^2}{m^2} = \frac{1+m^2}{m^2} z^2$,

und $Mt^2 = z^2 + m^2z^2 = (1+m^2)z^2$.

Ferner ist $\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \frac{z^2}{m^2} + z^2$ (§. 101. n. 5.),

$$= \frac{1+m^2}{m^2} z^2,$$

und $\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = \frac{m^2}{z^2}$;

folglich ist $\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 1 + m^2$,

$$ds = dz\sqrt{1+m^2},$$

$$s = \text{Const.} + z\sqrt{1+m^2}.$$

Verlangt man den Bogen AM; so wird Const. $= -a\sqrt{1+m^2}$, d. i. wenn man an den Punkt A die Tangente At' zieht, welche dem auf der AF in F errichteten Perpendikel Ft' in t' begegnet, Const. $= -At'$.

Folglich ist der Bogen $AM = Mt - At'$. Wird die Spirallinie rükwarts nach der Richtung MA fortgesezt; so nähert sich die Länge des von M an gerechneten Bogens der geraden Linie Mt desto mehr, je mehrere Wendungen die Spirallinie um den Pol F macht, ohne jemals diese Gränze zu erreichen.

Weil $\frac{ds}{dv} = \frac{z}{m}\sqrt{1+m^2}$,

$$\frac{dz}{dv} = \frac{z}{m},$$

$\frac{d^2z}{dv^2} = \frac{1}{m}\frac{dz}{dv} = \frac{z}{m^2}$; so ist §. 101. n. 14. der Krümmungshalbmesser r an dem Punkt $M = \frac{\frac{z^3}{m^3}(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}{z^2 + \frac{2z^2}{m^2} - \frac{z^2}{m^2}} = \frac{z}{m}\sqrt{1+m^2}$, d. i. wie man oben gefunden hat, $r =$ der Normallinie Mn. Der Punkt n, in welchem die an den Punkt M gezogene Normallinie der durch den Pol F auf den Radius Vector FM senkrecht gezogenen geraden Linie tFn begegnet, ist also der Mittelpunkt des Krümmungskreises an M. Da nun die

Subnormallinie $Fn = \frac{z}{m} = \frac{a}{m} e^{\frac{v}{m}}$, mithin $v = m$ Lg. $\frac{Fn}{\frac{1}{m}a}$ ist; so

liegen die Mittelpunkte aller Krümmungskreise ebenfalls auf einer um den Pol F beschriebenen logarithmischen Spirallinie. Man ziehe Fa auf FA senkrecht, und mache $Fa = \frac{1}{m}a$; so ist, wenn man von den rechten Winkeln MFn, AFM den Winkel MFa wegnimmt, $aFn = AFM = v = m$ Lg. $\frac{Fn}{\frac{1}{m}a}$, oder $aFn = m$ Lg. $\frac{Fn}{Fa}$.

Die Evolute *an* der logarithmischen Spirallinie *AM* ist also der durch ihre Abwiklung erzeugten *AM* ähnlich, und sie wird ihr gleich, wenn $m = 1$ ist, weil alsdenn $Fn = FM$. Man beschreibe aus *F* als Mittelpunkt mit dem Halbmesser *FA* einen Kreis, welcher die Evolute *an* in *A'* schneide, ziehe den Radius Vector *FA'*, und mache den Winkel $A'FM' = AFM$; so ist vermöge des bewiesenen

$$aFM' = m \text{ Lg. } \frac{FM'}{Fa},$$

$$aFA' = m \text{ Lg. } \frac{FA'}{Fa},$$

$$\text{mithin } A'FM' = m \text{ Lg. } \frac{FM'}{FA'}.$$

Da nun $A'FM' = AFM$, und $FA' = FA$; so ist auch $FM' = FM$, und die Figur $A'FM'$ der AFM gleich und ähnlich. Die logarithmische Spirallinie $A'M'$ ist also der *AM* gleich und ähnlich, nur sind die Punkte *A'*, *M'* der ersten nicht die Mittelpunkte der an die Punkte *A*, M gezogenen Krümmungskreise, wenn *m* eine von der Einheit verschiedene Zahl ist.

§. 103. Für die krumme Linie *AM* (Fig. 50.) ist eine Gleichung zwischen dem veränderlichen Winkel $AFM = v$, und dem Radius Vector $FM = z$ gegeben, man soll die Differentiale des Sectors *AFM*, des durch die Umdrehung dieses Sectors um die Axe *AF* beschriebenen Körpers, und der von dem Bogen *AM* beschriebenen krummen Oberfläche finden, wenn diese als Functionen von *v* betrachtet werden.

Man ziehe *MP* auf *AF* senkrecht, und setze $AF = a$, $AP = x$, $PM = y$; so ist

der Sector AFM = Fläche AMP + Dreyek PFM,

= Fläche $AMP + \frac{1}{2}(a-x)y$,

und *d.* Sect. AFM = *d.* Fläche $AMP + \frac{1}{2}\,d.\,(a-x)\,y$,

$= ydx - \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}(a-x)\,dy$ (§. 91.),

$= \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}(a-x)\,dy.$

Es ist aber $y = z \text{ Sin. } v$, und $x = a - z \text{ Cos. } v$,

mithin $dy = dz \text{ Sin. } v + zdv \text{ Cos. } v$,

$dx = -dz \text{ Cos. } v + zdv \text{ Sin. } v$,

$ydx = -zdz \text{ Sin. } v \text{ Cos. } v + z^2 dv \overline{\text{Sin. } v}^2$,

$(1-x)\,dy = zdz \text{ Sin. } v \text{ Cos. } v + z^2 dv \overline{\text{Cos. } v}^2$,

$ydx + (a-x)\,dy = z^2 dv$; folglich ist

1.) *d.* Sect. $AFM = \frac{1}{2}z^2 dv$.

Der Inhalt V des durch die Umdrehung des Sectors AFM um die Axe AF beschriebenen Körpers ist dem von der Fläche APM beschriebenen Körper, und dem geraden Kegel, welcher durch die Umdrehung des rechtwinklichten Dreyeks FPM um die Axe FP beschrieben wird, zusammengenommen gleich; folglich ist

$$V = \pi . \int y^2 dx + \tfrac{1}{3} \pi . y^2 (a - x) \text{ §. 99.),}$$

$$\text{und } dV = \pi . y^2 dx - \tfrac{1}{3} \pi . y^2 dx + \tfrac{2}{3} \pi . y (a - x) dy,$$

$$= \tfrac{2}{3} \pi . y (y dx + (a - x) dy),$$

$$= \tfrac{2}{3} \pi\, y\, z^2 dv, \text{ vermöge des Bew. von n. 1.}$$

Also ist 2.) $dV = \tfrac{2}{3} \pi . z^3 dv \operatorname{Sin}. v$, weil $y = z \operatorname{Sin}. v$.

Bezeichnet man die von dem Bogen AM beschriebene krumme Oberfläche mit S; so ist $dS = 2\pi . y\, ds$ (§. 96.),

$$= 2\pi . y dv \sqrt{\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + z^2}$$

(§. 101. n. 5.),

oder 3.) $dS = 2\pi . z dv \operatorname{Sin}. v \sqrt{\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + z^2}$.

§. 104. Beyspiele. Der Parameter einer Parabel sey $= 4a$, der von dem Brennpunkt ausgehende Radius Vector $= z$, und der Winkel, welchen dieser mit dem an den Scheitel der Parabel gezogenen Radius Vector einschließt, heiße v; so ist

$$z = \frac{a}{\operatorname{Cos}. \frac{1}{2} v^2} = a \operatorname{Sec}. \tfrac{1}{2} v^2 = a (1 + \operatorname{Tg}. \tfrac{1}{2} v^2), \text{ und daher}$$

$$\tfrac{1}{2} z^2 dv = \tfrac{1}{2} a^2 dv \operatorname{Sec}. \tfrac{1}{2} v^2 (1 + \operatorname{Tg}. \tfrac{1}{2} v^2),$$

$$= a^2 . \tfrac{1}{2} dv \operatorname{Sec}. \tfrac{1}{2} v^2 + \frac{a^2}{3} . \tfrac{1}{2} dv \operatorname{Sec}. \tfrac{1}{2} v^2 \operatorname{Tg}. \tfrac{1}{2} v^2,$$

$$= a^2 d . \operatorname{Tg}. \tfrac{1}{2} v + \frac{a^2}{3} d . \operatorname{Tg}. \tfrac{1}{2} v^3 \text{ (§. 30. n. 3. u. §. 37.).}$$

Folglich ist $\int \tfrac{1}{2} z^2 dv$ oder der parabolische Sector $\Big\} = a^2 (\operatorname{Tg}. \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \operatorname{Tg}. \tfrac{1}{2} v^3)$, so genommen, daß er für $v = 0$ verschwindet.

Für die Conchoide (Fig. 12. 13. 14.) ist, wenn man $CD = a$, $DB = b$, $BCM = v$, und $\left\{\begin{matrix} CM \\ CM' \end{matrix}\right\} = z$ sezt,

$z = a \operatorname{Sec}. v \pm b$, wo das obere Zeichen für die obere, das untere Zeichen für die untere Conchoide gilt (§. 102.).

Folglich ist $\frac{1}{2}z^2dv = \frac{1}{2}a^2dv\,\overline{\text{Sec.}\,v}^2 \pm abdv\,\text{Sec.}\,v + \frac{1}{2}b^2dv$.

Es ist aber $dv\,\text{Sec.}\,v = \frac{dv}{\text{Cos.}\,v} = \frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{\text{Cos.}\,v^2} = \frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{(1+\text{Sin.}\,v)(1-\text{Sin.}\,v)}$,

$$= \tfrac{1}{2}\frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{1+\text{Sin.}\,v} + \tfrac{1}{2}\frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{1-\text{Sin.}\,v},$$

$= \frac{1}{2}d.\,\text{Lg.}\,(1+\text{Sin.}\,v) - \frac{1}{2}d.\,\text{Lg.}\,(1-\text{Sin.}\,v)$, (§. 29. n. 4. u. §. 39.),

$$= d.\,\text{Lg.}\,\sqrt{\frac{1+\text{Sin.}\,v}{1-\text{Sin.}\,v}} = d.\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}v).$$

Demnach ist $\int\frac{1}{2}z^2dv = \frac{1}{2}a^2\,\text{Tg.}\,v \pm ab\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v) + \frac{1}{2}b^2v$, so genommen, daß es für $v = 0$ verschwindet.

Für die obere Conchoide ist also

der Sector $BCM = \frac{1}{2}a^2\,\text{Tg.}\,v + \frac{1}{2}b^2v + ab\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v)$.

In Beziehung auf die untere Conchoide ist, wenn $b = a$ (Fig. 13.) die durch den Bogen CM' und seine Chorde begränzte Fläche

$CM'C = \frac{1}{2}a^2(\text{Tg.}\,v + v - 2\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v))$.

Für $b > a$ (Fig. 12.) findet sich, so lange als $a\,\text{Sec.}\,v < b$ ist, der Sector $ACM' = \frac{1}{2}a^2\,\text{Tg.}\,v + \frac{1}{2}b^2.v - ab\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v)$. Man setze $\text{Sec.}\,c = \frac{b}{a}$; so ist c der Winkel, für welchen der Radius Vector CM' verschwindet, und unter welchem die an den Punkt C des Bogens $M'Cm'$ gezogene Tangente die gerade Linie CD schneidet (§. 69. pag. 142.), und man erhält, wenn man $v = 0$ setzt,

die Fläche $AM'CA = \frac{1}{2}a^2\,\text{Tg.}\,c + \frac{1}{2}b^2\,\text{Tg.}\,c - ab\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}c)$.

Verlangt man die Fläche, welche durch den Bogen Cm' der unteren Conchoide und durch seine Chorde begränzt wird; so muß man in dem Integral von $\frac{1}{2}z^2dv$ die Constante so bestimmen, daß es für $v = c$ verschwindet. Hienach wird

die Fläche $Cm'C = \frac{1}{2}a^2(\text{Tg.}\,v - \text{Tg.}\,c) + \frac{1}{2}b^2(v-c) - ab\,\text{Lg.}\,\frac{\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v)}{\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}c)}$.

Für $b < a$ (Fig. 14.) ist

der Sector $BCM = \frac{1}{2}a^2\,\text{Tg.}\,v + \frac{1}{2}b^2.v + ab\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v)$,

der Sector $ACM' = \frac{1}{2}a^2\,\text{Tg.}\,v + \frac{1}{2}b^2.v - ab\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v)$,

und die Fläche $ABMM'A = 2ab\,\text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}v)$.

Um die gerade Linie AB (Fig. 51.) als Durchmesser sey ein Kreis beschrieben, von einem der Endpunkte A des Durchmessers eine Chorde AN, sodenn NQ auf AB und QM auf AN senkrecht gezogen; so liegen alle so bestimmte Punkte M auf einer krummen Linie $AMBM'A$, welche die Eylinie heißt *).

Man setze $AB = a$, $AM = z$, $BAM = v$. [Da $AB : AN = AN : AQ = AQ : AM$; so ist

$$AB : AM = \overline{AB}^3 : \overline{AN}^3,$$

*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. 1788. erstes Stük. S. 85 f. Seite 87. f. f.

$$a : z = 1 : \overline{\text{Cos.}\, v}^3,$$

$$z = a\,\overline{\text{Cos.}\, v}^3,$$

und daher $d.$ Sect. $BAM = \frac{1}{2} a^2 dv\, \overline{\text{Cos.}\, v}^6$ (§. 103. n. 1.).

Nach §. 95. pag. 204. ist aber

$$\int dv \overline{\text{Cos.}\, v}^6 = \tfrac{1}{6} \overline{\text{Cos.}\, v}^5 \text{Sin.}\, v + \frac{5.1}{6.4} \overline{\text{Cos.}\, v}^3 \text{Sin.}\, v + \frac{5.3.1}{6.4.2} \text{Cos.}\, v \text{Sin.}\, v + \frac{5.3.1}{6.4.2} v,$$

welches für $v = 0$ verschwindet; folglich ist der Sector

$$BAM = \tfrac{1}{2} a^2 (\tfrac{1}{6} \overline{\text{Cos.}\, v}^5 \text{Sin.}\, v + \frac{5}{24} \overline{\text{Cos.}\, v}^3 \text{Sin.}\, v + \frac{5}{16} \text{Cos.}\, v \text{Sin.}\, v + \frac{5}{16} v).$$

Sezt man $v = \frac{1}{2}\pi$; so erhält man die Fläche $AMBA = \frac{5}{6}\frac{5}{4} a^2\pi$, und die ganze Fläche $AMBA'M$ der Eylinie $= \frac{5}{3}\frac{5}{2} a^2\pi = \frac{5}{8}$ der Fläche eines um den Durchmesser AB beschriebenen Kreises.

Weil $z = a\,\overline{\text{Cos.}\, v}^3$; so ist $z^3 dv \text{Sin.}\, v = a^3 dv \text{Sin.}\, v\, \overline{\text{Cos.}\, v}^9$, und das Differential des durch die Umdrehung des Sectors BAM um die Axe AB beschriebenen Körpers ist

$dV = \frac{2}{3} a^3 \pi dv \text{Sin.}\, v\, \overline{\text{Cos.}\, v}^9$; folglich ist

$V = C - \frac{1}{1}\frac{1}{5} a^3 \pi\, \overline{\text{Cos.}\, v}^{10}$. Es soll aber V mit x zugleich verschwinden; folglich muß seyn $C = \frac{1}{1}\frac{1}{5} a^3\pi$, und daher

$$V = \tfrac{1}{1}\tfrac{1}{5} a^3 \pi (1 - \overline{\text{Cos.}\, v}^{10}).$$

Den Inhalt des ganzen eyförmigen Körpers, welcher durch die Umdrehung der Fläche AMB um die Axe AB beschrieben wird, findet sich, wenn man $v = \frac{1}{2}\pi$ sezt,

$= \frac{1}{1}\frac{1}{5} a^3\pi$ oder $= \frac{2}{5}$ einer um AB als Durchmesser beschriebenen Kugel.

Aus der Gleichung $z = a\,\overline{\text{Cos.}\, v}^3$ folgt

$$\frac{dz}{dv} = -3a \text{Sin.}\, v\, \overline{\text{Cos.}\, v}^2, \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = 9a^2 \text{Sin.}\, v \overline{\text{Cos.}\, v}^4, z^2 = a^2 \overline{\text{Cos.}\, v}^6,$$

folglich ist

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = a^2\, \overline{\text{Cos.}\, v}^4 (9 \text{Sin.}\, v^2 + \overline{\text{Cos.}\, v}^2)$$ (§. 101. n. 5.), und wenn man die von dem Bogen BM während der Umdrehung der Figur um die Axe AB beschriebene Oberfläche $= S$ sezt,

$$dS = 2a^2\pi\, \overline{\text{Cos.}\, v}^4\, dv \text{Sin.}\, v \text{Cos.}\, v \sqrt{1 + 8.\overline{\text{Sin.}\, v}^2}$$ (§. 103. n. 3.),

$$= \tfrac{1}{1}\tfrac{1}{2} a^2\pi\, \overline{\text{Cos.}\, v}^4\, d.(1 + 8.\overline{\text{Sin.}\, v}^2)^{\frac{5}{2}}.$$

Man sezze $(1 + 8.\overline{\text{Sin.}\, v}^2)^{\frac{3}{2}} = u$; so ist $1 + 8.\overline{\text{Sin.}\, v}^2 = u^{\frac{2}{3}}$,

$8.\overline{\text{Cos.}\, v}^2 = 9 - u^{\frac{2}{3}}$, und es wird

$$dS = \frac{a^2\pi}{12.64} (9 - u^{\frac{2}{3}})^2\, du,$$

$$= \frac{a^2\pi}{12.64}(81.du - 18.u^{\frac{2}{3}}\,du + u^{\frac{4}{3}}\,du).$$

Also ist $S = C + \frac{a^2\pi}{12.64}(81.u - \frac{3.18}{5}u^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}})$,

$$= C + \frac{a^2\pi.u}{256}(27 - \frac{18}{5}u^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{7}u^{\frac{4}{3}}),$$

$$= C + \frac{a^2\pi}{256}(27 - \frac{18}{5}(1 + 8.\overline{\text{Sin.}v}^2) + \frac{1}{7}(1 + 8.\overline{\text{Sin.}v}^2)^2)(1 + 8\overline{\text{Sin.}v}^2)^{\frac{5}{2}}.$$

Nun soll $S = 0$ seyn für $v = 0$; folglich muß seyn

$0 = C + \frac{a^2\pi}{256}(27 - \frac{18}{5} + \frac{1}{7})$, oder $C = -\frac{103}{1120}a^2\pi$, und daher ist die durch den Bogen BM beschriebene krumme Oberfläche

$$= \frac{a^2\pi}{256}(27 - \tfrac{18}{5}(1 + 8\overline{\text{Sin.}v}^2) + \tfrac{1}{7}(1 + 8\overline{\text{Sin.}v}^2)^2)(1 + 8\overline{\text{Sin.}v}^2)^{\frac{5}{2}}$$

$$- \frac{103}{1120}a^2\pi.$$

Sezt man $v = \frac{1}{2}\pi$; so erhält man die krumme Oberfläche des ganzen eyförmigen Körpers $\frac{313}{560}a^2\pi$, welche sich also zu der Oberfläche der um den Durchmesser AB beschriebenen Kugel verhält wie 313 : 560.

Integralrechnung.

Erstes Capitel.

Von der Integration rationaler Functionen einer veränderlichen Größe.

§. 105. Diejenige Function einer veränderlichen Größe, deren Differential einem vorgegebenen Differential gleich ist, heißt das Integral dieses Differentials, und es kann wenn der Exponent des Differentialverhältnißes einer gegebenen Function $F'x$ der veränderlichen Größe x gleich ist, das Integral von $dxF'x$ von jedem anderen Integral, welches ebenfalls $F'x$ zum Differentialexponenten hat, nur um eine constante Größe verschieden seyn (§. 12.). Wenn also $dy = ax^n dx$, und a, n constant sind; so ist

$$y = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, \text{ weil } dy = \frac{(n+1)a}{n+1} x^n = ax^n \text{ (§. 23.),}$$

oder es ist $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$. Soll dieses Integral für $x = b$ verschwinden; so muß seyn $o = \frac{ab^{n+1}}{n+1} + C$, $C = -\frac{ab^{n+1}}{n+1}$. Dadurch wird es vollkommen bestimmt, und

$$= \frac{a}{n+1}(x^{n+1} - b^{n+1}).$$

In dem Fall, wenn $n = -1$ ist, leidet diese Integralformel eine Ausnahme. Sezt man $n = -1$; so erhält man $\frac{a}{o}(x^o - b^o) = \frac{a(1-1)}{o} = \frac{o}{o}$. Es ist aber in diesem Fall

$$dy = ax^{-1}dx = a.\frac{dx}{x} = a.d.\text{Lg.}x \text{ (§. 29. n. 4.); folglich}$$

$$y = a\text{Lg.}x + C = a\text{Lg.}x - a\text{Lg.}b = a\text{Lg.}\frac{x}{b}, \text{ wenn } y$$

für $x = b$ verschwinden soll.

Eben dieses Integral erhält man auch, wenn man nach §. 60. den Werth des Bruchs $\frac{a(x^{n+1}-b^{n+1})}{n+1}$ für $n=-1$ sucht, wo Zähler und Nenner zugleich verschwinden. Es ist nemlich, wenn man x und b als constant, und n als veränderlich betrachtet,

$$\frac{d.a(x^{n+1}-b^{n+1})}{dn} = a(x^{n+1}\,\mathrm{Lg}.\,x - b^{n+1}\,\mathrm{Lg}.\,b) \text{ (§. 29. n. 1.)},$$
$$= a(\mathrm{Lg}.\,x - \mathrm{Lg}.\,b) \text{ für } n=-1,$$

und $\frac{d.(n+1)}{dn} = 1$; folglich ist für $n=-1$ der Werth dieses Bruchs $= a(\mathrm{Lg}.\,x - \mathrm{Lg}.\,b) = a\,\mathrm{Lg}.\,\frac{x}{b}$.

Oder: weil $\frac{dx}{x} = \frac{dx}{1+x-1} = dx\,(1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3 + \&c.)$;

so ist $\int\frac{dx}{x} = C + x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \&c.$
$= C + 1 + x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \&c.$
$= C + 1 + \mathrm{Lg}.(1+x-1)$ (§. 28. n. 1.),
$= C + 1 + \mathrm{Lg}.\,x$, und es muß, wenn dieses Integral für $x=b$ verschwinden soll, $C+1+\mathrm{Lg}.\,b=0$, $C+1 = -\mathrm{Lg}.\,b$ seyn, woraus wie vorhin

$y = a\,\mathrm{Lg}.\,\frac{x}{b}$ folgt, wenn $dy = a\frac{dx}{x}$ ist.

§. 106. Es seyen P, Q, R Functionen derselben veränderlichen Größe x, und $\frac{dP}{dx} = P'$, $\frac{dQ}{dx} = Q'$, $\frac{dR}{dx} = R'$; so ist

$d.(P+Q-R) = P'dx + Q'dx - R'dx$ (§. 35.), und daher

$$\left.\begin{array}{l}\int(P'dx + Q'dx - R'dx)\\ \text{oder } \int(P'+Q'-R')\,dx\end{array}\right\} = \int P'dx + \int Q'dx - \int R'dx + C.$$

Hienach kann man jede Differentialformel integriren, welche die Form einer rationalen ganzen Function von x hat. Es sey

$dy = (ax^m + bx^n + cx^r + \ldots)\,dx$, wo m, n, r beliebige constante Exponenten sind; so ist

$y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{r+1}}{r+1} + \ldots + C$ (§. 105.), und das Integral ist immer algebraisch, wenn keiner der Exponenten $= -1$ ist. Kommt aber ein Glied vor von der Form $kx^{-1}dx$; so ist das Integral dieses Glieds $= k$ Lg. $x + C$. Hätte man $dy = (ax+b)^m dx$; so könnte das Binomium $ax + b$ mittelst des Binomialtheorems in eine rationale ganze Function von x entwickelt werden, welche für jede positive ganze Zahl m aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehen würde, und man würde in diesem Fall das gesuchte Integral genau erhalten. Weil aber $d.(ax+b) = adx$; so ist kürzer

$dy = \frac{1}{a} . (ax+b)^m d.(ax+b)$, und daher

$y = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + C$ (§. 37.).

Es ist also $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + C$, der Exponent m mag eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl seyn, den Fall ausgenommen, wo $m = -1$ ist, und

$\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a}$ Lg. $(ax+b) + C$ wird (§. 59.).

Allgemein, wenn X irgend eine Function von x, und $\frac{d.X}{dx} = X'$ ist; so ist (§. 37. u. 105.)

$\int aX^m . X' dx = \frac{aX^{m+1}}{m+1} + C$,

und $\int \frac{aX'dx}{X} = a$ Lg. $X + C$.

Sey z. B. $dy = (ax^n + b)^m . x^{n-1} dx$. Hier ist $d.(ax^n+b) = nax^{n-1}dx$, und daher

$dy = \frac{1}{na} . (ax^n+b)^m d.(ax^n+b)$,

$y = \frac{(ax^n+b)^{m+1}}{na(m+1)} + C$.

§. 107. Der Exponent des Differentialverhältnißes

sey ein Bruch von der Form $\frac{Ax^m}{(ax+b)^n}$. Man setze $ax+b=z$; so ist $x=\frac{z-b}{a}$, und $dx=\frac{dz}{a}$. Folglich wird $\frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}=\frac{A(z-b)^m dz}{a^{m+1}z^n}$. Ist nun m eine positive ganze Zahl; so wird die Entwiklung der $m$ten Potenz von $z-b$ eine Reihe von einer bestimmten Anzahl Glieder geben, welche mit z^n dividirt die Form einer rationalen ganzen Function von z annehmen wird, so daß man nach dem vorhergehenden §. integriren kann.

Sey z. B. $dy=\frac{x^2dx}{(ax+b)^3}$; so wird $dy=\frac{(z-b)^2dz}{a^3z^3}=\frac{z^2-2bz+b^2}{a^3z^3}dz$,

$=\frac{1}{a^3}\left(\frac{dz}{z}-\frac{2bdz}{z^2}+\frac{b^2dz}{z^3}\right)$, und wenn man nach dem vorhergehenden §. integrirt,

$$y=\frac{1}{a^3}\left(\text{Lg.}z+\frac{2b}{z}-\frac{b^2}{2z^2}\right)+C,$$

$$=\frac{1}{a^3}\left(\text{Lg.}(ax+b)+\frac{2b}{ax+b}-\frac{b^2}{2(ax+b)^2}\right)+C.$$

Wäre $dy=\frac{(Ax^m+Bx^p+Cx^q+\ldots)dx}{(ax+b)^n}$, so könnte man, wenn m, p, q positive ganze Zahlen sind, nach eben dieser Regel die Integrale von $\frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$, $\frac{Bx^p dx}{(ax+b)^n}$ u. s. w., mithin y selbst finden (§. 106.).

§. 108. Wenn $dy=\frac{Pdx}{Q}$, und so wohl P als Q rationale ganze Functionen von x sind; so kann man, wenn der Exponent der höchsten Potenz von x im Zähler größer ist als im Nenner, den Zähler P mit Q, den Rest wieder mit Q u. s. w. so lange dividiren, bis man bey dem ferneren Dividiren negative Potenzen von x in dem Quotienten erhalten würde. Der so erhaltene Quotient M wird also eine rationale ganze Function von x, und der Rest R wird

eine rationale ganze Function von x seyn, in welcher der Exponent der höchsten Potenz von x wenigstens um eine Einheit kleiner seyn wird, als in dem Nenner. Man wird also haben $dy = Mdx + \frac{R}{Q}\,dx$. Das Integral von Mdx erhält man nach §. 105. u. 106., und es kommt nur noch darauf an, das Integral von $\frac{Rdx}{Q}$ zu finden, wo Q und R rationale ganze Functionen von x sind, und der Exponent der höchsten Potenz von x im Zähler R kleiner ist als in dem Nenner. Der Bruch $\frac{R}{Q}$ wird also die allgemeine Form haben

$$\frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + T}{x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \ldots + T'},$$

denn man kann immer, wenn der Coefficient von x^n nicht $= 1$, sondern $= a$ wäre, Zähler und Nenner mit a dividiren, und dadurch den Bruch auf diese Form bringen.

Es seyen $a, a', a'', \ldots a^{(n)}$ die Wurzeln der Gleichung $x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \ldots + T' = 0$; so ist nach der Theorie der Gleichungen $(x-a)(x-a')(x-a'')\ldots(x-a^{(n)}) =$

$$x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \ldots + T',$$

und man kann, wie hernach gezeigt werden soll, wenn alle Wurzeln a, a' u. s. w. ungleich sind, den vorgegebenen Bruch in Partialbrüche zerfällen, deren Zähler constante Größen, und deren Nenner die Factoren $x-a, x-a'$ u. s. w. des Nenners des vorgegebenen Bruchs sind, so daß die Summe dieser Brüche dem gegebenen Bruch gleich wird. Bezeichnet man die Zähler dieser Brüche mit N, N', N'' u. s. w. so wird

$$\int \frac{Rdx}{Q} = \int \frac{Ndx}{x-a} + \int \frac{N'dx}{x-a'} + \text{&c.}$$

$$= N\,\text{Lg.}(x-a) + N'\,\text{Lg.}(x-a') + \text{&c.}\ (\text{§. 106.}).$$

Sey z. B. $dy = \frac{x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 84x + 158}{x^3 - x^2 - 14x + 24}\,dx$; so findet man den Quotienten $M = x + 1$, und den Rest $R = 6x^2 - 10x - 10$. Folglich ist

$dy = (x+7)\,dx + \frac{(6x^2-10x-10)\,dx}{x^3-x^2-14x+24}$. Der Nenner dieses Bruchs ist $= (x-3)(x-2)(x-4)$. Man setze

$$\frac{6x^2-10x-10}{(x-3)(x-2)(x+4)} = \frac{N}{x-3} + \frac{N'}{x-2} + \frac{N''}{x+4};$$ so muß seyn

$6x^2-10x-10 = (x-2)(x+4)N + (x-3)(x+4)N' + (x-3)(x-2)N''$, was auch der Werth von x seyn mag. Da nun für $x=3$ die Coefficienten von N' und N'' verschwinden; so wird, wenn man $x=3$ setzt,

$$\left.\begin{matrix} 6.9-3.10-10 \\ \text{oder } 14 \end{matrix}\right\} = (3-2)(3+4)N = 7N, \text{ und } N = 2.$$

Für $x=2$ wird $-6 = -6N'$, und $N' = 1$.

Endlich für $x=-4$ wird $126 = 42N''$, und $N'' = 3$.

Es ist also $dy = (x+7)\,dx + \frac{2dx}{x-3} + \frac{dx}{x-2} + \frac{3dx}{x+4}$,

und $y = \frac{1}{2}x^2 + 7x + 2\text{Lg.}(x-3) + \text{Lg.}(x-2) + 3\text{Lg.}(x+4) + C$,

$= \frac{1}{2}x^2 + 7x + \text{Lg.}(x-3)^2(x-2)(x+4)^3 + C$.

§. 109. Allgemein sey, wenn alle Factoren des Nenners ungleich sind,

$$\frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Sx + T}{x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \ldots + T'},$$

oder $$\frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Sx + T}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(r)})\ldots(x-a^{(n)})} =$$

$$\frac{N}{x-a} + \frac{N'}{x-a'} + \ldots + \frac{N^{(r)}}{x-a^{(r)}} + \ldots + \frac{N^{(n)}}{x-a^{(n)}};$$ so muß seyn

$$\begin{aligned}
&Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Sx + T \\
&= (1.)(x-a')(x-a'')\ldots(x-a^{(r)})\ldots(x-a^{(n)}).N \\
&+ x-a)(1.)(x-a'')\ldots(x-a^{(r)})\ldots(x-a^{(n)}).N' \\
&+ (x-a)(x-a')(1.)\ldots(x-a^{(r)})\ldots(x-a^{(n)}).N'' \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\vdots \\
&+ (x-a)(x-a')\ldots\ldots(1.)\ldots\ldots(x-a^{(n)})\,N^{(r)} \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\vdots \\
&+ (x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(r)})\ldots(1.)(x-a^{(n)})\,N^{(n-1)}
\end{aligned}$$

$+(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(r)})\ldots(x-a^{(n-1)})$ (I.) $N^{(n)}$.

Sezt man $x=a$; so verschwinden alle Glieder, welche den Factor $x-a$ enthalten, und es wird $Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Sa+T$

$=(a-a')(a-a'')\ldots(a-a^{(r)})\ldots(a-a^{(n)})\,N$,

wodurch der Zähler N bestimmt ist.

Ebenso findet man den Zähler N', wenn man $x=a'$ macht, und allgemein den Zähler $N^{(r)}$, wenn $x=a^{(r)}$ gesezt wird, so daß man hat

$$N^{(r)}=\frac{A(a^{(r)})^{n-1}+B(a^{(r)})^{n-2}+\ldots+S.a^{(r)}+T}{(a^{(r)}-a)(a^{(r)}-a')\ldots(a^{(r)}-a^{(n-1)})(a^{(r)}-a^{(n)})}\,,$$ wo

statt des verschwindenden Factors $(a^{(r)}-a^{(r)})$ beständig 1 zu seßen ist.

§. 110. Wenn der Nenner des Bruchs mehrere gleiche Factoren hat; so können die Zähler der Partialbrüche, welche die ungleichen Factoren zu Nennern haben, nach dem vorhergehenden §. gefunden werden. Zieht man die Summe dieser Brüche von dem gegebenen Bruch ab; so ist der Rest ein Bruch, dessen Zähler eine rationale ganze Function von x, und dessen Nenner das Product der gleichen Factoren ist. In dem Fall, wo alle diese Factoren einander gleich sind, kann man alsdenn nach §. 107. integriren. Wenn aber nicht alle übrigen Factoren einander gleich sind, und der zu zerfällende Bruch die Form hat

$\frac{Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Sx+T}{(x-a)^m(x-a')^p(x-a'')(x-a''')}$, wo m, p positive ganze Zahlen sind; so kann man ihn in Brüche zerfällen, deren Zähler constant, und deren Nenner $(x-a)^m, (x-a)^{m-1}\ldots(x-a)$, $(x-a')^p, (x-a')^{p-1}\ldots(x-a')$, $x-a''$, $x-a'''$ sind.

Sezt man nemlich den zu zerlegenden Bruch =

$$\frac{Y}{(x-a)^m}+\frac{Y'}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{Y^{(m-1)}}{x-a}$$

$$+\frac{Z}{(x-a')^p}+\frac{Z}{(x-a')^{p-1}}+\ldots+\frac{Z^{(p-1)}}{x-a'}$$
$$+\frac{N''}{x-a''}+\frac{N'''}{x-a'''};$$

so muß, wenn man alle diese Brüche auf einerley Benennung bringt, seyn

$$Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots Sx+T$$
$$=(x-a')^p(x-a'')(x-a''')Y+(x-a)(x-a')^p(x-a'')(x-a''')Y'+..$$
$$+(x-a)^m(x-a'')(x-a''')Z+(x-a)^m(x-a')(x-a'')(x-a''')Z'+..$$
$$+(x-a)^m(x-a')^p(x-a''')N''+(x-a)^m(x-a')^p(x-a'')N'''.$$

Macht man $x=a''$; so wird, weil der Zähler des Bruchs nicht mit $x-a''$ theilbar ist, die erste Seite der Gleichung nicht verschwinden, und daher einen gegebenen Werth bekommen. Auf der anderen Seite werden alle Glieder, das Glied welches N'' enthält ausgenommen, verschwinden, so daß sich die zweyte Seite der Gleichung auf $(a''-a)^m(a''-a')^p(a''-a''')N''$ reduciren wird, wodurch der Werth von N'' bestimmt wird. Ebenso findet man den Werth von N''', wenn man $x=a'''$ macht. Die Zähler der Partialbrüche, welche die einfachen ungleichen Factoren zu Nennern haben, können also nach den in dem vorhergehenden §. gegebenen Regeln gefunden werden.

Man setze jezt $x=a$; so wird

$$Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+\ldots+S.a+T=(a-a')^p(a-a'')(a-a''')Y,$$

wodurch der Zähler Y gegeben ist. Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab; so kommt

$$A(x^{n-1}-a^{n-1})+B(x^{n-2}-a^{n-2})+\ldots+S(x-a)$$
$$=((x-a')^p(x-a'')(x-a''')-(a-a')^p(a-a'')(a-a'''))Y$$
$$+(x-a)(x-a')^p(x-a'')(x-a''')Y'+\&c.$$

Für $x=a$ verschwinden alle Glieder dieser Gleichung, und man kann daher beyderseits mit $x-a$ dividiren. Setzt man nach dieser Division $x=a$; so verschwinden die zwey ersten Glieder hinter dem Gleichheitszeichen und die Reihe vor dem Gleichheitszeichen nicht mehr, alle übrigen Glieder enthalten aber noch den Factor $x-a$, und verschwinden, wenn

man

man $x=a$ sezt. Folglich erhält man eine Gleichung, welche nur noch die unbekannte Größe Y enthält, wodurch diese bestimmt wird. Auf ähnliche Art findet man die Zähler der übrigen partiellen Brüche.

Noch kann dieses Verfahren mittelst der Differentialrechnung abgekürzt werden. Man differentiire obige Gleichung; so erhält man

$$(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+\ldots+S$$
$$=(p(x-a')(x-a'')(x-a''')+(x-a')^{p}(x-a''')+(x-a')^{p}(x-a''))Y$$
$$+(x-a)\,d.\,\frac{(x-a')^{p}(x-a'')(x-a''')Y'}{dx}$$
$$+(x-a')^{p}(x-a'')(x-a''')Y'+\&c.$$

wo alle folgende Glieder den Factor $x-a$ enthalten.

Man mache jezt $x=a$; so ist

$$(n-1)Aa^{n-2}+(n-2)Ba^{n-3}+\ldots+S$$
$$=(p(a-a')(a-a'')(a-a''')+(a-a')^{p}(a-a''')+(a-a')^{p}(a-a''))Y$$
$$+(a-a')^{p}(a-a'')(a-a''')Y'.$$

Da nun Y schon gefunden ist; so findet man mittelst dieser Gleichung Y'. Differentiirt man die Gleichung noch einmal, und sezt alsdenn $x=a$; so verschwinden hinter dem Gleichheitszeichen alle auf die drey ersten folgende Glieder, und man findet den Zähler Y'' u. s. w.

Sey z. B. $\frac{x^3+2x^2-3x+2}{(x-2)^2(x+3)(x-1)}=\frac{Y}{(x-2)^2}+\frac{Y'}{x-2}+\frac{N'}{x+3}+\frac{N''}{x-1}$;

so muß seyn $x^3+2x^2-3x+2=(x+3)(x-1)Y+(x-2)(x+3)(x-1)Y'$
$+(x-2)^2(x-1)N'+(x-2)^2(x+3)N''$.

Für $x=2$ wird $12=5Y$, $Y=\frac{12}{5}$. Zieht man die Gleichung $12=5Y$ von der vorhergehenden ab; so kommt

$$x^3+2x^2-3x-10=((x+3)(x-1)-5)Y+(x-2)(x+3)(x-1)Y'$$
$$+(x-2)^2(x-1)N'+(x-2)^2(x+3)N'',$$

und, wenn man beyderseits mit $x-2$ dividirt,

$$x^2+4x+5=(x+4)Y+(x+3)(x-1)Y'+(x-2)(x-1)N'$$
$$+(x-2)(x+3)N''.$$

Man sezze $x=2$; so wird

$17 = 6Y + 5Y' = \frac{72}{5} + 5Y'$, weil $Y = \frac{12}{5}$,

mithin $Y' = \frac{13}{25}$.

Mittelst der Differentialrechnung erhält man

$$3x^2 + 4x - 3 = (x-1+x+3)\,Y + (x+3)(x-1)\,Y' + (x-2)(x-1+x+3)\,Y' + \&c.$$

mithin für $x = 2$

$17 = 6Y + 5Y'$ wie vorhin.

Die Zähler der übrigen Brüche, welche die ungleichen Factoren zu Nennern haben, findet man nach dem vorhergehenden §. $= -\frac{1}{50}$ und $+\frac{1}{2}$. Also ist der vorgegebene Bruch

$$= \frac{12}{5} \times \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{13}{25} \times \frac{1}{x-2} - \frac{1}{50} \times \frac{1}{x+3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1}.$$

Sey $\frac{x^3}{(x-a)^4} = \frac{N}{(x-a)^4} + \frac{N'}{(x-a)^3} + \frac{N''}{(x-a)^2} + \frac{N'''}{x-a}$; so muß seyn

$$x^3 = N + (x-a)\,N' + (x-a)^2\,N'' + (x-a)^3\,N'''.$$

Für $x = a$ wird $a^3 = N$. Man differentiire diese Gleichung; so wird

$3x^2 = N' + 2(x-a)\,N'' + 3(x-a)^2\,N'''$,

$3a^2 = N'$ für $x = a$.

Man differentiire aufs neue; so kommt

$6x = 2N'' + 6(x-a)\,N'''$, und $6a = 2N''$ für $x = a$.

Differentiirt man noch einmal; so wird

$6 = 6N'''$, und $N''' = 1$.

Also ist $\frac{x^3}{(x-a)^4} = \frac{a^3}{(x-a)^4} + \frac{3a^2}{(x-a)^3} + \frac{3a}{(x-a)^2} + \frac{1}{x-a}$.

§. 111. Wenn einige der Factoren des Nenners imaginär sind; so sind sie immer paarweise vorhanden, und das Product von je zwey imaginären Factoren giebt einen möglichen quadratischen Factor. Es sey einer der imaginären Factoren $= x - a - b\sqrt{-1}$; so ist der andere $= x - a + b\sqrt{-1}$, und ihr Product ist $= (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, und die Summe der zwey partiellen Brüche, welche diese imaginäre Factoren zu Nennern haben, wird einem Bruch gleich seyn, dessen Nenner $= x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, und dessen Zähler eine rationale ganze Function von x von der Form $Kx + L$ ist, wo K und L constante Größen sind. Demnach wird jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner rationale ganze Functionen von x sind, in Brüche zerfällt

werden können, welche constante Größen zu Zählern, und die möglichen einfachen Factoren zu Nennern haben, und in solche Brüche deren Zähler von der Form $Kx + L$, und deren Nenner, im Fall alle quadratische Factoren ungleich sind, von der Form $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ sind. Sind aber mehrere der quadratischen Factoren einander gleich; so geben die gleichen quadratischen Factoren wie in dem vorhergehenden §. eine Reihe von Brüchen von der Form

$$\frac{Kx+L}{(x^2-2ax+a^2+b^2)^m} + \frac{K'x+L'}{(x^2-2ax+a^2+b^2)^{m-1}} \cdots \frac{Kx^{(m-1)}+L^{(m-1)}}{x^2-2ax+a^2+b^2},$$

wo m eine positive ganze Zahl ist.

Es ist also noch zu zeigen, wie die Integrale von $\frac{(Kx+L)\,dx}{x^2+px+q}$ und von $\frac{(Kx+L)\,dx}{(x^2+px+q)^m}$ gefunden werden können, wo K, L, p und q constante Größen sind, und m eine positive ganze Zahl bezeichnet.

§. 112. Weil $x^2+px+q = (x+\frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2$; so kann, wenn $q > \frac{1}{4}p^2$ ist, dieser quadratische Factor nicht in einfache Factoren zerfällt werden. Man setze zur Abkürzung $x + \frac{1}{2}p = z$, und $q - \frac{1}{4}p^2 = k^2$; so wird

$$\frac{(Kx+L)\,dx}{x^2+px+q} = \frac{(Kz+L-\frac{1}{2}pK)\,dz}{z^2+k^2} = \frac{K}{2}\cdot\frac{2z\,dz}{z^2+k^2} + (L-\tfrac{1}{2}pK)\cdot\frac{dz}{z^2+k^2}.$$

Das Integral des ersten Glieds ist $\frac{K}{2}\,\mathrm{Lg.}(z^2+k^2)$ (§. 106.), und weil

$$\frac{dz}{z^2+k^2} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\frac{dz}{k}}{1+\left(\frac{z}{k}\right)^2} = \frac{1}{k}\,d.\,Arc.\,\mathrm{Tg.}\,\frac{z}{k}\ (\S.\ 34.\ \mathrm{n.}\ 3.);$$

so ist das Integral des zweyten Glieds $= \frac{L-\frac{1}{2}pK}{k}\,Arc.\,\mathrm{Tg.}\,\frac{z}{k}$.

Man setze statt z und k ihre Werthe; so wird, wenn $q > \frac{1}{4}p^2$,

$$\int\frac{(Kx+L)\,dx}{x^2+px+q} = K\,\mathrm{Lg.}\sqrt{x^2+px+q} +$$

$$+\frac{L-\frac{1}{2}pK}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}\,Arc.\,\mathrm{Tg}.\,\frac{x+\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}+C.$$

Wäre $q<\frac{1}{4}p^2$; so würde k^2 negativ, und $x^2+px+q = x^2-k^2 = (x+k)(x-k)$. Folglich könnte man nach §. 108. integriren.

Eben diese Integralformel ist auch auf diejenigen Fälle anwendbar, wo einige der constanten Größen $K, L, p=0$ sind. Es ist nemlich

$$\int\frac{xdx}{x^2+px+q}=\mathrm{Lg}.\sqrt{x^2+px+q}-\frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}\,Arc.\mathrm{Tg}.\,\frac{x+\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}.$$

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}\,Arc.\,\mathrm{Tg}.\,\frac{x+\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}.$$

§. 113. Um das Integral von $\frac{(Kx+L)\,dx}{(x^2+px+q)^m}$, setze man wie vorhin zur Abkürzung $x+\frac{1}{2}p=z$, und $q-\frac{1}{4}p^2=k^2$; so verwandelt sich die Differentialformel in folgende

$$\frac{Kzdz}{(z^2+k^2)^m}+(L-\tfrac{1}{2}pK)\frac{dz}{(z^2+k^2)^m},$$ wo das Integral des ersten Glieds $=C-\frac{K}{2(m-1)(z^2+k^2)^{m-1}}$ ist (§. 106.).

Ferner ist $d.z(z^2+k^2)^{-m+1}=dz\,(z^2+k^2)^{-m+1}-2(m-1)\,z^2dz\,(z^2+k^2)^{-m}$ (§. 36.),

d. i. $d.\frac{z}{(z^2+k^2)^{m-1}}=\frac{dz}{(z^2+k^2)^{m-1}}-2(m-1)\,\frac{z^2dz}{(z^2+k^2)^m}$;

folglich $\frac{z^2dz}{(z^2+k^2)^m}=-\frac{1}{2(m-1)}\,d.\frac{z}{(z^2+k^2)^{m-1}}+\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{dz}{(z^2+k^2)^{m-1}}$.

Aber $\frac{(z^2+k^2)\,dz}{(z^2+k^2)^m}=\frac{dz}{(z^2+k^2)^{m-1}}$;

folglich $\frac{k^2dz}{(z^2+k^2)^m}=\frac{1}{2(m-1)}\,d.\frac{z}{(z^2+k^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2(m-1)}\cdot\frac{dz}{(z^2+k^2)^{m-1}}$,

und daher $\int\frac{dz}{(z^2+k^2)^m}=\frac{1}{(2m-2)k^2}\cdot\frac{z}{(z^2+k^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{(2m-2)k^2}\cdot\int\frac{dz}{(z^2+k^2)^{m-1}}$.

Hienach ist $\int \frac{dz}{(z^2+k^2)^2} = \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{z}{z^2+k^2} + \frac{1}{2k^2} \int \frac{dz}{z^2+k^2}$,

$$= \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{z}{z^2+k^2} + \frac{1}{2k^3} \cdot Arc.\text{Tg.} \frac{z}{k}.$$

Mittelst dieses Integrals erhält man das Integral von $\frac{dz}{(z^2+k^2)^3}$ u. s. w.

Sezt man statt z und k wieder ihre Werthe, und vereinigt die Integrale der zwey Glieder, in welche die vorgegebene Differentialformel zerfällt worden ist; so wird, wenn $q > \frac{1}{4}p^2$,

$$\int \frac{(Kx+L)\,dx}{(x^2+px+q)^m} = C - \frac{K}{2(m-1)(x^2+px+q)^{m-1}}$$
$$+ \frac{L-\frac{1}{2}pK}{(2m-2)(q-\frac{1}{4}p^2)} \cdot \frac{x+\frac{1}{2}p}{(x^2+px+q)^{m-1}}$$
$$+ \frac{(2m-3)(L-\frac{1}{2}pK)}{(2m-2)(q-\frac{1}{4}p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}.$$

Insbesondere ist $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{1}{(2m-2)(q-\frac{1}{4}p^2)} \cdot \frac{x+\frac{1}{2}p}{(x^2+px+q)^{m-1}}$
$$+ \frac{2m-3}{(2m-2)(q-\frac{1}{4}p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} + C.$$

§. 114. Es ist in dem 111ten §. im Allgemeinen gezeigt worden, wie die Zähler der partiellen Brüche von der Form $\frac{Ax+B}{x^2+2ax+a^2+b^2}$ mittelst der imaginären einfachen Factoren gefunden werden können. Diese Zerfällung kann nach der Analogie des §. 109. u. 110. gezeigten Verfahrens auf folgende Art abgekürzt werden.

Sey $\frac{U}{V} = \frac{Ax+B}{x^2+2ax+a^2+b^2} + \frac{P}{Q}$; so muß seyn

$$U = (Ax+B)Q + (x^2+2ax+a^2+b^2)P,$$

und daher $P = \frac{U-(Ax+B)Q}{x^2+2ax+a^2+b^2}$.

Soll nun P eine rationale ganze Function von x seyn; so muß $U-(Ax+B)Q$ mit $x^2+2ax+a^2+b^2$ theilbar seyn, mithin auch die imaginären Factoren $x+a+b\sqrt{-1}$,

und $x+a-b\sqrt{-1}$ enthalten, und verschwinden, wenn man $x=-a\pm b\sqrt{-1}$ macht. Durch diese Substitution verwandle sich U in $u\pm u'\sqrt{-1}$, und Q in $q\pm q'\sqrt{-1}$; so wird man die Gleichung haben $u\pm u'\sqrt{-1}-(-A\alpha\pm Ab\sqrt{-1}+B)(q\pm q'\sqrt{-1})=0$. Man entwikle diese Gleichung; so kommt

$$u+Aaq+Abq'-Bq$$
$$\pm(u'-Abq+Aaq'-Bq')\sqrt{-1}=0,$$

woraus man, wenn der mögliche und der imaginäre Theil besonders $=0$ gesezt werden, folgende zwey Gleichungen erhält

1.) $u+Aaq+Abq'-Bq=0$,

2.) $u'-Abq+Aaq'-Bq'=0$, mittelst welcher die Werthe von A und B gefunden werden können.

Um q und q' zu bestimmen; differentiire man die Gleichung

$V=(x^2+2ax+a^2+b^2)Q$; so wird

$$\frac{dV}{dx}=(2x+2a)Q+(x^2+2ax+a^2+b^2)\frac{dQ}{dx}.$$

Folglich sind, wenn man $x=-a\pm b\sqrt{-1}$ sezt, und die diesen Wæthen von x entsprechende Werthe von $\frac{dV}{dx}$ mit $v\pm v'\sqrt{-1}$ bezeichnet, die eben diesen Werthen von x entsprechende Werthe von Q, d. i.

$q\pm q'\sqrt{-1}=\frac{v\pm v'\sqrt{-1}}{\pm 2b\sqrt{-1}}$, weil für $x=-a\pm b\sqrt{-1}$ der Factor von $\frac{dQ}{dx}$ verschwindet. Aus dieser Gleichung erhält man folgende

$$\pm(v'-2bq)\sqrt{-1}+2bq'+v=0,$$

mithin $v'-2bq=0$, $2bq'+v=0$.

Es ist also $q=\frac{v'}{2b}$, und $q'=-\frac{v}{2b}$.

Sezt man diese Werthe in die Gleichungen n. 1. u. 2. so verwandeln sie sich, wenn man sie mit $2b$ multiplicirt in folgende

$$2bu + Aav' - Abv - Bv' = 0,$$
$$2bu' - Abv' - Aav + Bv = 0,$$

aus welchen man $A = \frac{2(uv + u'v')}{v'^2 + v^2}$,

und $B = \frac{2(a(uv + v'u') + b(uv' - u'v))}{v'^2 + v^2}$ findet.

Sey z. B. $\frac{U}{V} = \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x - 6}$. Der Nenner dieses Bruchs hat den einfachen Factor $x - 2$, und den quadratischen Factor $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2$, welcher sich nicht mehr in mögliche Factoren zerfällen läßt, und $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ giebt. Die zwey imaginären Factoren des Neuners sind $x + 1 \pm \sqrt{2}\sqrt{-1}$; folglich ist $u = -1$, und $u' = -7\sqrt{2}$. Ferner ist

$\frac{dV}{dx} = 3x^2 - 1 = -4 \mp 6\sqrt{2}.\sqrt{-1}$ für $x = -1 \pm \sqrt{2}.\sqrt{-1}$,

und daher $v = -4$, $v' = -6\sqrt{2}$.

Also ist $uv + u'v' = 88$, und $v'^2 + v^2 = 88$, mithin $A = 2$.

Sodenn ist $uv' - u'v = (6 - 28)\sqrt{2} = -22\sqrt{2}$,

und $b(uv' - u'v) = -22\sqrt{2}.\sqrt{2} = -44$,

$a(uv + u'v') = 88$;

Folglich $B = 1$.

Der partielle Bruch, welcher $x^2 + 2x + 3$ zum Nenner hat, ist also $\frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 3}$.

Der Zähler des Bruchs, dessen Nenner $= x - 2$ ist, findet sich nach §. 109. der Einheit gleich, und daher ist

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x - 6} = \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{x - 2}.$$

Wenn also $dy = \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x - 6}\,dx$ ist; so ist

$$dy = \frac{(2x + 1)\,dx}{x^2 + 2x + 3} + \frac{dx}{x - 2}, \text{ und nach §. 112. u. 106.}$$

$$y = 2\,\mathrm{Lg}\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,Arc.\,\mathrm{Tg}.\,\frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \mathrm{Lg}.(x - 2) + C,$$

$$= \mathrm{Lg}.(x^3 - x - 6) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,Arc.\,\mathrm{Tg}.\,\frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

§. 115. Wenn in dem Nenner V des Bruchs $\frac{U}{V}$ der quadratische Factor $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ mehrere mal vorkäme, und also

$V=(x^2+2ax+a^2+b^2)^m Q$, oder zur Abkürzung $V=R^m.Q$ wäre, wo m eine positive ganze Zahl bezeichnet; so müßte man nach §. 111. seßen

$$\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{R^m}=\frac{A'x+B'}{R^{m-1}}+..+\frac{A^{(m-1)}x+B^{(m-1)}}{R}+\frac{P}{Q}.$$

Hieraus folgt wie in dem vorhergehenden §.

$$U=(Ax+B)Q+(A'x+B')R.Q+.....$$
$$+(A^{(m-1)}x+B^{(m-1)})R^{m-1}.Q+P.R^m,$$

und $P=\frac{U-Q(Ax+B+(A'x+B')R+...+(A^{(m-1)}x+B^{(m-1)})R^{m-1})}{R^m}$.

Sezt man $x=-a\pm b\sqrt{-1}$; so wird $R=0$, und man erhält, wenn die in dem vorhergehenden §. gebrauchten Benennungen beybehalten werden, die Gleichung $u\pm u'\sqrt{-1}-(q\pm q'\sqrt{-1})(-Aa\pm Ab\sqrt{-1}+B)=0$, und diese giebt, wenn man die imaginären und die möglichen Glieder besonders einander gleich sezt, zu der Bestimmung von A und B dieselben Gleichungen, welche man in dem vorhergehenden §. gefunden hat. Substituirt man die aus diesen Gleichungen gefundenen Werthe von A und B in dem Zähler von P; so wird $U-Q(Ax+B)$, mithin auch der ganze Zähler mit R oder mit $x^2+2ax+a^2+b^2$ theilbar, und man wird, wenn

$$\frac{U-(Ax+B)Q}{x^2+2ax+a^2+b^2}=U''$$ gesezt wird, haben

$$P=\frac{U'-(A'x+B')+(A''x+B'')R+...)Q}{R^{m-1}}$$

Sezt man wiederum $x=-a\pm b\sqrt{-1}$; so verschwinden in dem Zähler von P alle Glieder, und es wird $U'-(A'x+B')Q=0$ für $x=-a\pm b\sqrt{-1}$, aus welcher Gleichung man ebenso A' und B' erhält, wie man vorhin A und B gefunden hat. Ebenso bestimmt man die Zähler der übrigen Brüche. Die Werthe von U' für $x=-a\pm b\sqrt{-1}$ können nach dem in dem vorhergehenden §. gezeigten Verfahren mittelst der Differentialrechnung gefunden werden, ohne die Divisionen mit R wirklich zu machen *).

*) Ausführlich lehrt die Zerfällung der Brüche in einfache Euler. Intro-

Will man die imaginären Größen vermeiden; so bringt man alle partiellen Brüche

$$\frac{N}{x-a'}, \frac{N'}{(x-a')^m}, \frac{N''}{(x-a')^{m-1}}, \ldots \frac{Ax+B}{(x^2+2ax+a^2+b)^r}, \text{ u. s. w.}$$

mit dem gegebenen Bruch auf einerley Benennung, entwickelt ihre Zähler in ganze rationelle Functionen von x, addirt und ordnet sie nach den Potenzen von x, und sezt diese Function von x dem ebenfalls entwickelten Zähler des vorgegebenen Bruchs gleich. Da diese zwey Functioneu beständig einander gleich seyn müßen, was auch der Werth von x seyn mag; so müßen nach der Methode der unbestimmten Coefficienten so wohl diejenigen Glieder, welche kein x enthalten, als auch die Coefficienten der gleichen Potenzen von x einander gleich seyn, wodurch man ebensoviele Gleichungen erhält, als man unbestimmte Größen hat, und mittelst welcher die Zähler der partiellen Brüche gefunden werden können.

§. 116. Man sieht aus dem bisherigen, daß die Integration rationeller gebrochener Functionen einer veränderlichen Größe keine andere Schwierigkeit hat, als die Zerfällung ihrer Nenner in einfache und quadratische Factoren, welche auf die Auflösung der höheren Gleichungen hinauslauft. In einigen Fällen können diese Factoren mittelst der trigonometrischen Functionen gefunden werden.

Sey $x^2 - 2px + q^2$ einer der quadratischen Factoren der Function $x^r + a^r$, wo r eine positive ganze Zahl bezeichnet; so sind $x = p \pm q\sqrt{\frac{p^2}{q^2} - 1}$ die zwey Wurzeln der Gleichung $x^2 - 2px + q^2 = 0$, welche unmöglich sind, wenn $p < q$. In diesem Fall wird man setzen können $\frac{p}{q} = \text{Cos. } z$, und man wird haben $p = q \text{ Cos. } z$, $q\sqrt{\frac{p^2}{q^2} - 1} = q\sqrt{\text{Cos. } z^2 - 1} =$ $q \text{ Sin. } z\sqrt{-1}$, mithin

$$x = q \text{ Cos. } z \pm q \text{ Sin. } z\sqrt{-1},$$

$$(x - q \text{ Cos. } z - q \text{ Sin. } z\sqrt{-1})(x - q \text{ Cos. } z + q \text{ Sin. } z\sqrt{-1}) = x^2 - 2qx \text{ Cos. } z + q^2,$$

$$= x^2 - 2px + q^2.$$

Folglich sind $x - q \text{ Cos. } z - q \text{ Sin. } z\sqrt{-1}$ und $x - q \text{ Cos. } z + q \text{ Sin. } z\sqrt{-1}$ die zwey einfachen Factoren des quadratischen Factors $x^2 - 2px + q^2$,

ductio in Analysin infinitorum. L. I. §. 41. seqq. Comment. Acad. Petrop. T. XIV. pag. 99. seqq. Acta Acad. Petrop. 1780. P. I. pag. 32. seqq.

welche unmöglich sind, so lange als Sin. z möglich und nicht $= 0$ ist, und $x^2 - 2qx\,\text{Cos.}\,z + q^2$ ist unter derselben Voraussetzung der allgemeine Ausdruk eines quadratischen Factors, welcher nicht in mögliche einfache Factoren zerfällt werden kann. Nun soll aber $x^2 - 2px + q^2$ einer der quadratischen Factoren von $x^r + a^r$ seyn; folglich müßen die Werthe $x = q\,\text{Cos.}\,z \pm \text{Sin.}\,z\sqrt{-1}$ der Gleichung $x^r + a^r = 0$ Genüge leisten, und man wird die Gleichungen haben

$$q^r(\text{Cos.}\,z + \text{Sin.}\,z.\sqrt{-1})^r + a^r = 0,$$
$$q^r(\text{Cos.}\,z - \text{Sin.}\,z.\sqrt{-1})^r + a^r = 0,$$

oder (§. 33.) $q^r(\text{Cos.}\,rz + \text{Sin.}\,rz.\sqrt{-1}) + a^r = 0,$
$$q^r(\text{Cos.}\,rz - \text{Sin.}\,rz.\sqrt{-1}) + a^r = 0.$$

Man addire diese zwey Gleichungen und ziehe sie auch von einander ab; so erhält man $2q^r\,\text{Cos.}\,rz + 2a^r = 0,$

und $2q^r\,\text{Sin.}\,rz.\sqrt{-1} = 0.$

Also muß seyn 1.) Sin. $rz = 0$, und daher

2.) $\text{Cos.}\,rz = \pm 1,$

3.) $\pm q^r + a^r = 0.$

Und der allgemeine Ausdruk eines quadratischen Factors von $x^r + a^r$ wird seyn 4.) $x^2 - 2qx\,\text{Cos.}\,z + q^2$.

Sey erstlich r eine gerade Zahl $2n$; so muß, damit der Werth von q aus der Gleichung n. 3. möglich wird, Cos. $2nz = -1$ seyn, welcher $q = a$ giebt. Demnach muß, wenn π den halben Umfang bezeichnet, seyn $2nz = \pi$, oder 3π, 5π, allgemein $(2k+1)\pi$, wo k irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, welche auch 0 seyn kann, und daher $z = \frac{2k+1}{2n}\pi$.

Der allgemeine Ausdruk eines quadratischen Factors von $x^{2n} + a^{2n}$ ist also $x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,\frac{2k+1}{2n}\,\pi + a^2$, und, wenn man $k = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w. macht,

$$x^{2n} + a^{2n} = (x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2n}\,\pi + a^2)$$
$$\times\,(x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,\frac{3}{2n}\,\pi + a^2)$$
$$\times\,(x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,\frac{5}{2n}\,\pi + a^2)$$
$$\vdots$$
$$\times\,(x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,\frac{2n-3}{2n}\,\pi + a^2)$$
$$\times\,(x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,\frac{2n-1}{2n}\,\pi + a^2).$$

Weil $\text{Cos.}\,\frac{2n+1}{2n}\,\pi = \text{Cos.}\,(\pi + \frac{1}{2n}\,\pi) = \text{Cos.}\,(\pi - \frac{1}{2n}\,\pi) = \text{Cos.}\,\frac{2n-1}{2n}\,\pi$,

u. s. w.; so würden, wenn man k größer $n-1$ machte, die vorigen Factoren wiederkehren. Man erhält also alle quadratische Factoren von $x^{2n}+a^{2n}$, wenn man in dem allgemeinen Ausdruk des quadratischen Factors $k=0, 1, 2$, u. s. w. bis $n-1$ inclusive sezt.

Zweytens sey r eine ungerade Zahl $2n+1$. In diesem Fall darf Cos. rz so wohl $+1$ als -1 seyn. Nimmt man ihn, um q positiv zu machen, $=-1$; so muß $(2n+1)z=(2k+1)\pi$, $z=\frac{2k+1}{2n+1}\pi$ seyn.

Für $k=n$ wird $z=\pi$, also Sin. $z=0$, Cos. $z=-1$. Folglich hat die Function $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ den möglichen einfachen Factor $x+a$, und man erhält die quadratischen Factoren, wenn man $k=0, 1, 2 \ldots n-1$ macht. Demnach ist

$$x^{2n+1}+a^{2n+1}=(x^2-2ax\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2n+1}\pi+a^2)$$

$$\times(x^2-2ax\,\text{Cos.}\,\frac{3}{2n+1}\pi+a^2)$$

$$\vdots$$

$$\times(x^2-2ax\,\text{Cos.}\,\frac{2n-1}{2n+1}\pi+a^2)$$

$$\times(x+a).$$

Für k größer als n kehren die vorigen Factoren wieder, und wenn man Cos. $rz=+1$ gesezt hätte; so würde man dieselben Factoren, nur in umgekehrter Ordnung erhalten haben.

Drittens sey r eine gerade Zahl $2n$, und die zu zerfällende Function $x^{2n}-a^{2n}$. Die Gleichung $n.$ 3. wird jezt $\pm q^{2n}-a^{2n}=0$, und es muß, damit q möglich wird Cos. rz oder Cos. $2nz=+1$, und daher $2nz=0$, $2\pi, 4\pi, \ldots 2k\pi$,

$z=\frac{2k}{2n}\pi$ seyn.

Für $k=0$ wird $x=a$ Cos. $0=a$, und für $k=n$ wird $x=-a$. Folglich hat $x^{2n}-a^{2n}$ die zwey einfachen Factoren $x-a$, $x+a$. Macht man noch $k=1, 2, \ldots n-1$; so wird

$$x^{2n}-a^{2n}=(x-a)(x+a)$$

$$\times(x^2-2ax\,\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{2n}+a^2)$$

$$\times(x^2-2ax\,\text{Cos.}\,\frac{4\pi}{2n}+a^2)$$

$$\vdots$$

$$\times(x^2-2ax\,\text{Cos.}\,\frac{2n-2}{2n}\pi+a^2).$$

Für $k > n$ kommen die vorigen Factoren wieder.

Viertens sey r eine ungerade Zahl $2n+1$, und die zu zerfällende Function $x^{2n+1} - a^{2n+1}$. Man setze Cos. $(2n+1)z = +1$; so wird $q = a$, und es muß seyn

$$(2n+1)z = 0, 2\pi \ldots 2k\pi, \text{ mithin } z = \frac{2k}{2n+1}\pi.$$

Für $k = 0$ wird $x = a$; folglich hat $x^{2n+1} - a^{2n+1}$ den einfachen Factor $x - a$.

Macht man noch $k = 1, 2, \ldots n$; so erhält man

$$x^{2n+1} - a^{2n+1} = (x-a) \times \left(x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{2\pi}{2n+1} + a^2\right) \times \left(x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{4\pi}{2n+1} + a^2\right) \times \cdots \times \left(x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{2n\pi}{2n+1} + a^2\right).$$

Für $k > n$ kommen die vorigen Factoren wieder, und wenn man Cos. $(2n+1)z = -1$ gesezt hätte; so würde man dieselben Factoren, nur in umgekehrter Ordnung erhalten haben.

Die Function $x^r + a^r$ läßt sich also, wenn r eine gerade Zahl ist, in $\frac{r}{2}$ quadratische Factoren, und, wenn r eine ungerade Zahl $2n+1$ ist, in einen einfachen Factor $x + a$ und in n quadratische Factoren zerfällen. Die Function $x^r - a^r$ kann, wenn r eine gerade Zahl $2n$ ist, in zwey einfache Factoren $x - a$, $x + a$, und in $n-1$ quadratische Factoren, wenn aber r eine ungerade Zahl $2n+1$ ist, in einen einfachen Factor $x - a$ und in n quadratische Factoren zerfällt werden. Dieser Saz heißt nach dem Erfinder der Coteſiſche Lehrſaz *). Nimmt man die möglichen und unmöglichen Wurzeln der Gleichung $x^r + a^r = 0$ zuſammen; ſo iſt hienach ihre Anzahl $= r$, übereinſtimmend mit der Theorie der Gleichungen.

§. 117. Auf ähnliche Art können die Functionen von der Form $x^{2r} - 2b^r x^r + a^{2r}$ in Factoren zerfällt werden. Löst man die Gleichung $x^{2r} - 2b^r x^r + a^{2r} = 0$ nach Art der quadratiſchen Gleichungen auf; ſo findet man

$$x^r = b^r \pm a^r \sqrt{\frac{b^{2r}}{a^{2r}} - 1},$$ und es wird, wenn a kleiner als b iſt, $x^r =$ einer möglichen Größe a'^r. In dieſem Fall kann alſo die Function nach dem vorhergehenden §. in Factoren zerfällt werden.

*) Harmonia mensurarum. pag. 114.

Ist aber $a \triangleright b$; so wird man setzen können $\left(\frac{b}{a}\right)^r = \text{Cos. } w$. Alsdenn wird $b^r = a^r \text{ Cos. } w$, und

$$x^{2r} - 2b^r x^r + a^{2r} = x^{2r} - 2a^r x^r \text{ Cos. } w + a^{2r}.$$

Sey $x = p\,(\text{Cos. } z \pm \text{Sin. } z\sqrt{-1})$; so ist

$x^r = p^r\,(\text{Cos. } z \pm \text{Sin. } z\sqrt{-1})^r = p^r\,(\text{Cos. } rz \pm \text{Sin. } rz\sqrt{-1})$ (§. 33.),

und $x^{2r} = p^{2r}\,(\text{Cos. } 2rz \pm \text{Sin. } 2rz\sqrt{-1})$. Also muß seyn

$p^{2r}(\text{Cos. } 2rz + \text{Sin. } 2rz\sqrt{-1}) - 2a^r p^r(\text{Cos. } rz + \text{Sin. } rz\sqrt{-1})\text{Cos. } w + a^{2r} = 0$,

$p^{2r}\,(\text{Cos. } 2rz - \text{Sin. } 2rz\sqrt{-1}) - 2a^r p^r\,(\text{Cos. } rz - \text{Sin. } rz\sqrt{-1})\text{Cos. } w + a^{2r} = 0$.

Man nehme die halbe Summe und die halbe Differenz dieser Gleichungen; so erhält man

1.) $p^{2r} \text{ Cos. } 2rz - 2a^r p^r \text{ Cos. } rz \text{ Cos. } w + a^{2r} = 0$,

und 2.) $p^{2r} \text{ Sin. } 2rz - 2a^r p^r \text{ Sin. } rz \text{ Cos. } w = 0$.

Von dem Product der ersten dieser Gleichungen durch den Sin. $2rz$ ziehe man das Product der zweyten durch den Cos. $2rz$ ab; so kommt

$-2a^r p^r\,(\text{Sin. } 2rz \text{ Cos. } rz - \text{Cos. } 2rz \text{ Sin. } rz) \text{ Cos. } w + a^{2r} \text{ Sin. } 2rz = 0$,

d. i. $-2a^r p^r \text{ Sin. } rz \text{ Cos. } w + a^{2r} \text{ Sin. } 2rz = 0$.

Aber $-2a^r p^r \text{ Sin. } rz \text{ Cos. } w + p^{2r} \text{ Sin. } 2rz = 0$, (n. 2.);

folglich ist $p = a$, und die Gleichung n. 2. wird

$$a^{2}{}_{r} \text{ Sin. } 2rz - 2a^{2r} \text{ Sin. } rz \text{ Cos. } w = 0,$$

oder $2 \text{ Sin. } rz \text{ Cos. } rz - 2 \text{ Sin. } rz \text{ Cos. } w = 0$,

woraus man Cos. $rz = $ Cos. w erhält. Also muß seyn $rz = \pm w$, oder $= 2\pi \pm w$, $4\pi \pm w \ldots 2k\pi \pm w$, und der allgemeine Ausdruk eines quadratischen Factors von $x^{2r} - 2a^r x^r \text{ Cos. } w + a^{2r}$ ist $x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{2k\pi \pm w}{r} + a^2$.

Sey erstlich r eine gerade Zahl $2n$; so ist

$$x^{4n} - 2a^{2n}x^{2n} \text{ Cos. } w + a^{4n} = (x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{w}{2n} + a^2)$$

$$\times (x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{2\pi - w}{2n} + a^2)$$

$$\times (x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{2\pi + w}{2n} + a^2)$$

$$\vdots$$

$$\times (x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{2(n-1)\pi + w}{2n} + a^2)$$

$$\times (x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{2n\pi - w}{2n} + a^2).$$

Sey zweytens r eine ungerade Zahl $2n+1$; so ist

$$x^{4n+2} - 2a^{2n+1}x^{2n+1} \text{ Cos. } w + a^{4n+2} = (x^2 - 2ax \text{ Cos. } \frac{w}{2n+1} + a^2) \times$$

$$\asymp (x^2 - 2ax \operatorname{Cos.} \frac{2\pi - w}{2n+1} + a^2)$$

$$\asymp (x^2 - 2ax \operatorname{Cos.} \frac{2\pi + w}{2n+1} + a^2)$$

.
.
.

$$\asymp (x^2 - 2ax \operatorname{Cos.} \frac{2n\pi - w}{2n+1} + a^2)$$

$$\asymp (x^2 - 2ax \operatorname{Cos.} \frac{2n\pi + w}{2n+1} + a^2).$$

Die quadratischen Factoren von $x^{2r} + 2a^r x^r \operatorname{Cos.} w + a^{2r}$ werden aus den vorhergehenden gefunden, wenn man $\pi - w$ statt w sezt, weil $\operatorname{Cos.}(\pi - w) = -\operatorname{Cos.} w$. Moivre dehnte den Cotesischen Lehrsaz auf dreytheilige Functionen von der hier betrachteten Form aus *).

§. 118. Mittelst des Cotesischen Lehrsatzes kann nun auch nach Anleitung des 114ten §. ein Bruch von der Form $\frac{x^m}{x^r \pm a^r}$, wo r eine positive ganze Zahl bezeichnet, in partielle Brüche zerfällt werden. Sey $x^2 - 2ax \operatorname{Cos.} z + a^2$ einer der quadratischen Factoren des Nenners, mithin $x = a(\operatorname{Cos.} z \pm \operatorname{Sin.} z \sqrt{-1})$. Da $U = x^m$; so wird man für $x = a(\operatorname{Cos.} z \pm \operatorname{Sin.} \sqrt{-1})$ haben $u \pm u' \sqrt{-1} = a^m (\operatorname{Cos.} z \pm \operatorname{Sin.} z \sqrt{-1})^m$,

$$= a^m (\operatorname{Cos.} mz \pm \operatorname{Sin.} mz \sqrt{-1}), \text{ (§. 33.)},$$

und daher $u = a^m \operatorname{Cos.} mz$, $u' = a^m \operatorname{Sin.} mz$.

Ferner ist $V = x^r \pm a^r$, $\frac{dV}{dx} = rx^{r-1}$, und für obige Werthe von x wird $v \pm v' \sqrt{-1} = ra^{r-1} (\operatorname{Cos.} z \pm \operatorname{Sin.} z \sqrt{-1})^{r-1}$

$$= ra^{r-1} (\operatorname{Cos.} (r-1) z \pm \operatorname{Sin.} (r-1) z \sqrt{-1}), \text{ (§. 33.)},$$

mithin $v = ra^{r-1} \operatorname{Cos.} (r-1) z$, $v' = ra^{r-1} \operatorname{Sin.} (r-1) z$.

Demnach ist $v^2 + v'^2 = r^2 a^{2r-2}$, und

$$uv + u'v' = ra^{m+r-1} (\operatorname{Cos.} (r-1) z \operatorname{Cos.} mz + \operatorname{Sin.} (r-1) z \operatorname{Sin.} mz),$$

$$= ra^{m+r-1} \operatorname{Cos.} (r-m-1) z;$$

folglich $A = \frac{2 \operatorname{Cos.} (r-m-1) z}{ra^{r-m-1}}$ (§. 114.).

Sodenn ist $uv' - u'v = ra^{m+r-1} (\operatorname{Sin.} (-1) z \operatorname{Cos.} mz - \operatorname{Cos.} (r-1) z \operatorname{Sin.} mz)$,

$$= ra^{m+r-1} \operatorname{Sin.} (r-m-1) z,$$

und, wenn man in dem Ausdruk des quadratischen Factors in §. 114. $-a \operatorname{Cos.} z$ statt $+a$, und $a \operatorname{Sin.} z$ statt b sezt,

*) Miscellanea Analytica. pag. 22. 23.

$$B = -\frac{2ra^{m+r}(\text{Cos.}(r-m-1)z\,\text{Cos.}\,z - \text{Sin.}(r-m-1)z\,\text{Sin.}\,z)}{r^2a^{2r-2}}, \text{ (§. 114.),}$$

$$= -\frac{2\,\text{Cos.}(r-m)z}{ra^{r-m-2}}.$$

Demnach ist der allgemeine Ausdruk eines aus der Zerfällung von $\frac{x^m}{x^r \pm a^r}$ entstandenen partiellen Bruchs, dessen Nenner quadratisch ist,

$$\frac{2}{ra^{r-m-1}} \times \frac{x\,\text{Cos.}(r-m-1)z - a\,\text{Cos.}(r-m)z}{x^2 - 2ax\,\text{Cos.}\,z + a^2}.$$

Sezt man statt z die den verschiedenen quadratischen Factoren entsprechende Werthe nach §. 116.; so erhält man alle partielle Brüche von $\frac{x^m}{x^r \pm a^r}$, welche quadratische Nenner haben.

Zweytes Capitel.

Von der Integration irrationaler Functionen einer veränderlichen Größe.

§. 119. Sey $dy = aX^m . X'dx$, X irgend eine Function von x, und $X' = \frac{d.X}{dx}$; so ist auch in dem Fall, wo m eine gebrochene Zahl ist,

$y = \frac{aX^{m+1}}{m+1} + C$ (§. 37. u. 105.). Man kann also alle Differentialformeln integriren, welche diese Form haben, oder auf diese Form gebracht werden können.

Wenn z. B. $dy = \frac{x^3dx}{\sqrt{a^4+x^4}} = x^3dx(a^4+x^4)^{-\frac{1}{2}}$; so ist, weil $d.(a^4+x^4) = 4x^3dx$,

$y = \int \frac{1}{4} \cdot 4x^3dx\,(a^4+x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}(a^4+x^4)^{\frac{1}{2}} + C,$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a^4+x^4} + C.$ Wäre $dy = dx\sqrt{a^2x^2+x^2}$; so hätte zwar diese Formel nicht die hier betrachtete Form. Sie kann aber durch eine leichte Verwandlung darauf gebracht werden, wenn man sie so ausdrükt $dy = xdx\sqrt{a^2+x^2} =$

$\frac{1}{2} \cdot 2xdx\sqrt{a^2+x^2}$, und man findet jezt $y = \frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
$= \frac{1}{3}(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2} + C$.

Weil es nun bey verwickelteren Ausdrücken nicht so leicht ist, sie so zu verändern, daß man nach der hier gegebenen Regel integriren kann; so sucht man sie durch schikliche Substitutionen auf die Form einer rationalen Function einer veränderlichen Größe zu bringen, um nach den in dem vorhergehenden Capitel gegebenen Regeln integriren zu können.

§. 120. Sey $dy = x^m dx(a+bx^n)^p$. Man seze erstlich $a+bx^n = z$; so ist $x^n = \frac{z-a}{b}$,

$$x = \frac{(z-a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}, \quad dx = \frac{\frac{1}{n}(z-a)^{\frac{1}{n}-1}}{b^{\frac{1}{n}}} \cdot dz, \text{ und daher}$$

$$dy = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1} z^p dz. \text{ Folglich kann man nach}$$

§. 106. integriren, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine positive ganze Zahl ist.

Nach dieser Regel kann man, wenn r eine positive ganze Zahl ist, folgende Differentialformeln integriren:

1.) $x^r dx(x \pm a)^p$, 2.) $x^r dx(a-x)^p$,

3.) $x^{2r+1} ax(x^2 \pm a^2)^p$, 4.) $x^{2r+1} dx(a^2-x^2)^p$.

Man seze zweytens $a+bx^n = x^n z$; so wird $x^n = \frac{a}{z-b}$,

$$\left.\begin{matrix} x^n z \\ a+bx^n \end{matrix}\right\} = \frac{az}{z-b}, \quad x = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{(z-b)^{\frac{1}{n}}}, \quad dx = \frac{-\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}}dz}{(z-b)^{\frac{1}{n}+1}}, \text{ und daher}$$

$$dy = -\frac{1}{n}a^{\frac{m+1}{n}+p} \times z^p dz(z-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)}. \text{ Folglich}$$

wird die Formel $x^m dx(a+bx^n)^p$ nach §. 106. integrabel, wenn

wenn $\frac{m+1}{n} + p$ eine negative ganze Zahl ist. Nach dieser Regel kann man also folgende Differentialformeln integriren:

5.) $\frac{dx}{x^r\sqrt{x^2 \pm ax}}$, 6.) $\frac{dx}{x^r\sqrt{ax-x^2}}$, wenn p eine positive ganze Zahl ist.

7.) $\frac{dx\sqrt{x^2 \pm ax}}{x^r}$, 8.) $\frac{dx\sqrt{ax-x^2}}{x^r}$, wenn r eine positive ganze Zahl, und nicht kleiner als 3 ist.

Denn es ist in Beziehung auf n. 5. $\frac{dx}{x^r\sqrt{x^2 \pm ax}} = \frac{dx}{x^{r+\frac{1}{2}}\sqrt{x \pm a}}$,

und daher $m = -r - \frac{1}{2}$, $n = 1$, $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} + p = -r$.

In Beziehung auf n. 7. ist $\frac{dx\sqrt{x^2 \pm ax}}{x^r} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{x \pm a}}{x^r}$, und

daher $m = -r + \frac{1}{2}$, $n = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} + p = -(r-2)$.

§. 121. Es giebt noch zwey Fälle, in welchen man $x^m dx(a+bx^n)^p$ rational machen, und nach dem vorhergehenden Capitel integriren kann. Die Voraussetzung $a+bx^n = z$ gab $dy = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}} z^p dz(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$, welcher Ausdruk rational ist, wenn p und $\frac{m+1}{n}$ ganze Zahlen sind. Ist aber p ein Bruch $\frac{q}{r}$; so setze man $a+bx^n = u^r$. Alsdenn wird

$$dy = \frac{r}{nb^{\frac{m+1}{n}}} u^{q+r-1}du(u^r-a)^{\frac{m+1}{n}-1},$$

mithin rational, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist.

Die Voraussetzung $a+bx^n = x^n z$ gab

$$dy = -\frac{1}{n} a^{\frac{m+1}{n}+p} z^p dz(z-b)^{-(\frac{m+1}{n}+p+1)}.$$

Ist p eine gebrochene Zahl $\frac{q}{r}$; so setze man $a+bx^n =$

$x^n . u^r$. Alsdenn wird

$$dy = -\frac{r}{n} a^{\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}} \asymp \frac{u^{q+r-1} du}{(u^r-b)^{\frac{m+1}{n}+\frac{q}{r}+1}},$$ mithin rational, wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{q}{r}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist.

Sey z. B. $dy = \frac{x\sqrt{x.dx}}{\sqrt{a-x}} = x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$; so sind $m = \frac{3}{2}$, $n = 1$, $q = -1$, $r = 2$, $\frac{m+1}{n} = \frac{5}{2}$, $\frac{m+1}{n} + \frac{q}{r} = 2$. Diese Formel wird also rational, wenn man $a - x = xu^2$ sezt. Man findet $dy = -2a^2 \asymp \frac{du}{(1+u^2)^3}$, und nach §. 110. $\int \frac{du}{(1+u^2)^3} = \frac{u}{4(1+u^2)^2} + \frac{3u}{8(1+u^2)} + Arc.\,\text{Tg.}\,u$; folglich ist, wenn man wieder $V\frac{a-x}{x}$ statt u sezt,

$$\int \frac{x\sqrt{x.dx}}{\sqrt{a-x}} = C - \tfrac{1}{2} x\sqrt{ax-x^2} - \tfrac{3}{4} a\sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{3}{4} a^2 Arc.\,\text{Tg.}\, V\frac{a-x}{x}.$$

§. 122. Mittelst der Differentiale der trigonometrischen Functionen (§. 34.) erhält man folgende Integrale, welche von der Quadratur des Kreises abhängen. Die constanten Größen sind der Kürze wegen nicht hinzugefügt.

1.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = Arc.\,\text{Sin.}\,\frac{x}{a}$,

$= -\,Arc.\,\text{Cos.}\,\frac{x}{a}$.

2.) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{x}{a}$,

$= -\frac{1}{a}\,Arc.\,\text{Cotg.}\,\frac{x}{a}$.

3.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,Arc.\,\text{Sec.}\,\frac{x}{a}$,

$= -\frac{1}{a}\,Arc.\,\text{Cosec.}\,\frac{x}{a}$.

4.) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = Arc.\,\text{Sin. vers.}\,\frac{x}{a}$.

Denn es ist $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$, woraus nach §. 34. n. 1. u. 2. die erste Integralformel sich ergiebt.

Sodenn ist $\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{dx}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)}$, und es folgt n. 2. aus §. 34. n. 3. u. 4.

Ferner ist $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = a. \frac{\frac{dx}{a}}{\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}}$, woraus nach §. 34. n. 5. u. 6. die Integralformel n. 3. folgt.

Endlich ist $\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{2\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$, woraus man nach §. 34. n. 7. das Integral n. 4. findet.

Wäre X irgend eine Function von x, und $\frac{d.X}{dx} = X'$; so würde man haben

$$\int \frac{X'dx}{\sqrt{A-X^2}} = \int \frac{\frac{X'}{\sqrt{A}}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{X}{\sqrt{A}}\right)^2}} = Arc.\,\mathrm{Sin}.\frac{X}{\sqrt{A}} + C$$

(§. 34. n. 1. u. §. 39.).

Eben so ist $\int \frac{X'dx}{A+X^2} = C + \frac{1}{\sqrt{A}} Arc.\,\mathrm{Tg}.\frac{X}{\sqrt{A}}$, u. s. w.

§. 123. Von der Quadratur der Hyperbel oder von den Logarithmen (§. 94.), hängen folgende Integrale ab, welche von denen des vorhergehenden §. nur in den Zeichen verschieden sind. Unter den Logarithmen werden natürliche verstanden.

1.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mathrm{Lg}.\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$.

2.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}} = \text{Lg.}\left(\frac{x \pm a}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 \pm 2ax}\right)$.

3.) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}\text{Lg.}\frac{a+x}{a-x} = \text{Lg.}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

4.) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2}\text{Lg.}\frac{x-a}{x+a} = \text{Lg.}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

5.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2a}\text{Lg.}\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$,

$= \frac{1}{a}\text{Lg.}\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$.

6.) $\int \frac{-dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2a}\text{Lg.}\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{\sqrt{a^2 + x^2} + a}$,

$= \frac{1}{a}\text{Lg.}\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x}$.

Denn es ist $\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{dx(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x)}{(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\sqrt{x^2 \pm a^2}}$,

$= \frac{dx + \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$,

$= d.\text{Lg.}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$ (§. 106.)

Bestimmt man die Constante so, daß das Integral für $x = a$ verschwindet; so erhält man n. 1.

Und weil $x^2 \pm 2ax = (x \pm a)^2 - a^2$; so ist $\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm ax}} = \frac{d.(x \pm a)}{\sqrt{(x \pm a)^2 - a^2}}$, woraus sich nach n. 1. das Integral n. 2. ergiebt.

Weil die Nenner von n. 3. u. 4. sich in die Factoren $a+x$, $a-x$, und $x+a$, $x-a$ zerfällen lassen; so kann man nach §. 108. integriren, wodurch man die angegebenen Integrale erhält.

Endlich ist $\frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{adx}{x^2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{d.\left(\frac{a}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}}$,

und man kann daher nach n. 1. integriren. Eben so kann man n. 6. auf die Form n. 1. bringen.

§. 124. Die in den zwey vorhergehenden §. §. angegebenen Integrale hätten auch auf folgende Art können gefunden werden.

1.) Weil $\sqrt{a^2-x^2} < a$, und der Ueberschuß von a über diese Quadratwurzel von x abhängt; so setze man $\sqrt{a^2-x^2} = a - xz$. Erhebt man ins Quadrat; so wird $a^2 - x^2 = a^2 - 2axz + x^2z^2$, $2axz = x^2(1+z^2)$, $x = \frac{2az}{1+z^2}$, und $\left.\begin{matrix} a - xz \\ \text{oder } \sqrt{a^2-x^2} \end{matrix}\right\} = \frac{a(1-z^2)}{1+z^2}$.

Ferner ist $dx = \frac{2a(1+z^2)dz - 4az^2dz}{(1+z^2)^2} = \frac{2a(1-z^2)dz}{(1+z^2)^2}$. Also wird

$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\frac{dz}{1+z^2} = 2\,d.\,Arc.\,\text{Tg.}\,z$ (§. 34. n. 3.), und

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2.\,Arc.\,\text{Tg.}\,z = 2\,Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, welches Integral von dem §. 122. n. 1. angegebenen verschieden zu seyn scheint. Es ist aber, wenn man $\frac{x}{a} = \text{Sin.}\,u$ macht, $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{1-\text{Cos.}\,u}{\text{Sin.}\,u} = \frac{2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}u^2}{2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}u\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}u} = \text{Tg.}\,\frac{1}{2}u$; folglich

$\left.\begin{matrix} u \\ \frac{x}{a} \end{matrix}\right\} = 2\,Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, übereinstimmend mit §. 122. n. 1.
$Arc.\,\text{Sin.}$

2.) Durch dieselbe Substitution wird auch die Formel §. 123. n. 5. rational. Weil nemlich

$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\frac{dz}{1+z^2}$, und $\frac{1}{x} = \frac{1+z^2}{2az}$; so wird

$\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\frac{dz}{z} = \frac{1}{a}\,d.\,\text{Lg.}\,z$, und, weil $z = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ ist,

$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\,\text{Lg.}\,\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, übereinstimmend mit n. 5. §. 123.

3.) Weil $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{(x-a)(x+a)}$; so setze man diese Quadratwurzel $= (x+a)z$. Alsdenn wird $(x-a)(x+a) = (x+a)^2z^2$,

$x - a = (x+a)z^2$, $x = a\cdot\frac{1+z^2}{1-z^2}$, $\left.\begin{matrix} (x+a)z \\ \text{oder } \sqrt{x^2-a^2} \end{matrix}\right\} = \frac{2az}{1-z^2}$,

und $dx = \frac{4azdz}{(1-z^2)^2}$; folglich

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2dz}{1-z^2} = \frac{dz}{1+z} + \frac{dz}{1-z} = d.\,\text{Lg.}\,(1+z) - d.\,\text{Lg.}\,(1-z).$$

Also ist $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \text{Lg.}\,\frac{1+z}{1-z} = \text{Lg.}\,\frac{1+\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}{1-\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}} = \text{Lg.}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a_2}}{a}$

wie n. I. §. 123.

Ebenso findet man $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, wenn man $\sqrt{x^2+a^2} = a+xz$ sezt.

Unter der vorigen Voraussetzung wird

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2(1-z^2)}{a(1+z^2)} \cdot \frac{dz}{1-z^2} = \frac{2}{a}\,\frac{dz}{1+z^2} = \frac{2}{a}\,d.\,Arc.\,\text{Tg.}\,z;$$

folglich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2}{a}\,Arc.\,\text{Tg.}\,\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$$ Macht man $\frac{x}{a} = \text{Sec.}\,u$; so

wird $\frac{x-a}{x+a} = \frac{\text{Sec.}\,u-1}{\text{Sec.}\,u+1} = \frac{1-\text{Cos.}\,u}{1+\text{Cos.}\,u} = \frac{2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}u^2}{2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}u^2} = \text{Tg.}\,\frac{1}{2}u^2$, also

$$\left.\begin{matrix} u \\ Arc.\,\text{Sec.}\,\frac{x}{a} \end{matrix}\right\} = 2\,Arc.\,\text{Tg.}\,\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},$$

und $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = 2\,Arc.\,\text{Tg.}\,\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$,

$$= Arc.\,\text{Sec.}\,\frac{x}{a}.$$

Auf ähnliche Art findet man $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$, wenn man $\sqrt{a^2+x^2}$ $= a+xz$ sezt.

4.) Man sezte $\left.\begin{matrix} \sqrt{2ax-x^2} \\ \text{oder } \sqrt{a^2-(a-x)^2} \end{matrix}\right\} = a-(a-x)z$; so wird

$$a-x = \frac{2az}{1+z^2},\ \text{und}\ \left.\begin{matrix} a-(a-x)z \\ \text{oder } \sqrt{2ax-x^2} \end{matrix}\right\} = \frac{a(1-z^2)}{1+z^2}.$$

$$\text{Ferner}\ \left.\begin{matrix} d.(a-x) \\ -dx \end{matrix}\right\} = \frac{2a(1-z^2)\,dz}{(1+z^2)^2},\ \text{mithin}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{2dz}{1+z^2} = -2\,d.Arc.\,\text{Tg.}\,z \text{ (§. 34. n. 3.)},$$

$$\text{und} \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = C - 2.Arc.\,\text{Tg.}\,z,$$

$$= C - 2.Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}.$$

Soll dieses Integral, wie das §. 122. n. 4., mit x zugleich verschwinden; so muß seyn $0 = C - 2.Arc.\,\text{Tg.}\,1$, $C = \frac{1}{2}\pi$, mithin

$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{1}{2}\pi - 2\,Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$. Man setze

$\frac{x}{a} = \left\{\begin{matrix}\text{Sin. vers.}\,u\\ 1-\text{Cos.}\,u\end{matrix}\right\}$; so ist $a-x = \text{Cos.}\,u$, und $\sqrt{2ax-x^2} = a\,\text{Sin.}\,u$,

mithin $\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x} = \frac{1-\text{Sin.}\,u}{\text{Cos.}\,u} = \text{Tg.}\,(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u)$. Also ist $\frac{1}{2}\pi - u$

$= 2\,Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$,

und u

oder $Arc.\,\text{Sin. vers.}\,\frac{x}{a}\Big\} = \frac{1}{2}\pi - 2\,Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, übereinstimmend mit §. 122. n. 4.

5.) Endlich weil $\sqrt{x^2 \pm 2ax} = \sqrt{(x \pm a)^2 + a^2}$; so läßt sich die Formel n. 2. §. 123. rational machen, wenn man $\sqrt{(x \pm a)^2 - a^2} = (x + a + a)z$ macht, und übrigens wie in n. 3. verfährt, indem man $x + a$ statt x setzt.

§. 125. Mittelst der trigonometrischen Functionen und der Logarithmen erhält man folgende Integrale:

1.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}\,\text{Lg.}\,\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

2.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}\,Arc.\,\text{Tg.}\,\sqrt{\frac{x-a}{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}\,Arc.\,\text{Sec.}\,\sqrt{\frac{x}{a}}$.

3.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a-x}} = -\frac{2}{\sqrt{a}}\,\text{Lg.}\,\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$.

Setzt man nemlich nach §. 121. in den Formeln 1. u. 2. die Größe $x \pm a = u$; so wird

$\frac{dx}{x\sqrt{x \pm a}} = \frac{2du}{u^2 \mp a}$, und man erhält in Beziehung auf das obere Zeichen,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}} = 2 \cdot \int \frac{du}{u^2-a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Lg.} \frac{u-\sqrt{a}}{u+\sqrt{a}} \text{ (§. 108.)},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Lg.} \frac{(u-\sqrt{a})^2}{u^2-a} = \frac{2}{\sqrt{a}} \text{Lg.} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

In Beziehung auf das untere Zeichen ist

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}} = \int \frac{2du}{u^2+a} = \frac{2}{\sqrt{a}} \int \frac{d.\frac{u}{\sqrt{a}}}{\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right)^2 + 1},$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} \textit{Arc.} \text{Tg.} \frac{u}{\sqrt{a}} \text{ (§. 122. n. 2.)},$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} \textit{Arc.} \text{Tg.} \sqrt{\frac{x-a}{a}}.$$

Für $a-x=u^2$ wird $\frac{dx}{x\sqrt{a-x}} = -\frac{2du}{a-u^2}$, und nach §. 108.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a-x}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \text{Lg.} \frac{\sqrt{a}+u}{\sqrt{a}-u} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \text{Lg.} \frac{(\sqrt{a}+u)^2}{a-u^2},$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{a}} \text{Lg.} \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}.$$

Weil $\frac{dx\sqrt{x \pm a}}{x} = \frac{dx(x \pm a)}{x\sqrt{x \pm a}} = \frac{dx}{\sqrt{x \pm a}} \pm \frac{adx}{x\sqrt{x \pm a}}$; so ist

4.) $\int \frac{dx\sqrt{x+a}}{x} = 2\sqrt{x+a} + 2\sqrt{a} \text{Lg.} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ (n. 1.),

und 5.) $\int \frac{dx\sqrt{x-a}}{x} = 2\sqrt{x-a} - 2\sqrt{a}\, \textit{Arc.} \text{Sec.} \sqrt{\frac{x}{a}}$, (n. 2.),

$$= 2\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{x-a}{a}} - \textit{Arc.} \text{Tg.} \sqrt{\frac{x-a}{a}}\right).$$

Und weil $\frac{dx\sqrt{a-x}}{x} = \frac{dx(a-x)}{x\sqrt{a-x}} = \frac{adx}{x\sqrt{a-x}} - \frac{dx}{\sqrt{a-x}}$, so ist

6.) $\int \frac{dx\sqrt{a-x}}{x} = -2\sqrt{a} \text{Lg.} \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{a-x}$,

$$= 2\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a-x}{a}} \cdot \text{Lg.}\ \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}\right).$$

§. 126. Auf ähnliche Weise erhält man aus den §. 122. u. 123. angegebenen Integralen folgende.

Weil $\frac{dx\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} = \frac{dx(x^2 \pm a^2)}{x\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \frac{a^2 dx}{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}$;

so ist 1.) $\int \frac{dx\sqrt{x^2+a^2}}{x} = \sqrt{x^2+a^2} + a\,\text{Lg.}\ \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}$,

das erste Glied nach §. 106., das zweyte nach §. 123. n. 6.

2.) $\int \frac{dx\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a.\ \textit{Arc.}\ \text{Sec.}\ \frac{x}{a}$

(§. 106. u. 122. n. 3.).

Weil $\frac{dx\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{(a^2-x^2)\,dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2 dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; so ist

3.) $\int \frac{dx\sqrt{a^2-x^2}}{x} = a\,\text{Lg.}\ \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \sqrt{a^2-x^2}$

(§. 123. n. 5. u. §. 106.).

Weil $\frac{dx\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{x} = \frac{(x^2 \pm 2ax)\,dx}{x\sqrt{x^2 \pm 2ax}} = \frac{(x \pm a)\,dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}} \pm \frac{adx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}}$; so ist

4.) $\int \frac{dx\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{x} = \sqrt{x^2 \pm 2ax} \pm a\,\text{Lg.}\left(\frac{x \pm a}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$.

(§. 106. u. 123. n. 2.).

Weil $\frac{dx\sqrt{2ax-x^2}}{x} = \frac{(2ax-x^2)dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} + \frac{adx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$; so ist

5.) $\int \frac{dx\sqrt{2ax-x^2}}{x} = \sqrt{2ax-x^2} + a\,\textit{Arc.}\ \text{Sin. vers.}\ \frac{x}{a}$

(§. 106. u. 122. n. 4.).

Weil $\frac{dx\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{x^2} = \frac{(x^2 \pm 2ax)\,dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm 2ax}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}} - 2.\frac{\mp a\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1 \pm \frac{2a}{x}}}$; so ist

6.) $\int \frac{dx\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{x^2} = \text{Lg.}\left(\frac{x \pm a}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 \pm 2ax}\right) - 2\sqrt{\frac{x \pm 2a}{x}}$

(§. 106. u. 123. n. 2.).

Endlich weil $\frac{dx\sqrt{2ax-x^2}}{x^2} = \frac{(2ax-x^2)\,dx}{x^2\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{2adx}{x\sqrt{2ax-x^2}} - \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$;

so ist

$$7.)\ \int \frac{dx\sqrt{2ax-x^2}}{x^2} = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \mathit{Arc.}\,\mathrm{Sin.v.}\,\frac{x}{a}$$

(§. 106. u. 122. n. 4.).

§. 127. Wenn P und Q beliebige Functionen von x sind, und $\frac{d.P}{dx} = P'$, $\frac{d.Q}{dx} = Q'$ gesezt wird; so ist (§. 36.).

$$d.PQ = PQ'dx + QP'dx, \text{ und daher}$$
$$PQ = \int PQ'dx + \int QP'dx.$$

Es findet also eine Beziehung dieser zwey Integrale auf einander statt, so daß das eine durch das andere gegeben ist. Man hat z. B.

$$\int PQ'dx = PQ - \int QP'dx = PQ - \int Q\,\frac{dP}{dx}\,dx.$$

Dieses Mittels bedient man sich, um die Integration eines vorgegebenen Differentials auf die Integration eines einfacheren zurükzuführen. Man nennt es das theilweise Integriren (intégration par parties.) Einige hieher gehörige Beyspiele findet man bey der Quadratur der Cykloide §. 93., bey der Rectification der Ellipse und Hyperbel §. 95. und in dem 113ten §. Hier soll die Anwendung dieses Verfahrens auf Differentiale von der §. 120. betrachteten Form gezeigt werden.

Sey $v = x^k(a+bx^n)^i$; so ist

I. $dv = kx^{k-1}\,dx\,(a+bx^n)^i + nibx^{k+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{i-1}$.

In dem ersten Glied sezze man $(a+bx^n)\,(a+bx^n)^{i-1}$ statt $(a+bx^n)^i$; so erhält man

II. $dv = kax^{n-1}dx(a+bx^n)^{i-1} + (k+ni)\,bx^{n+k-1}dx(a+bx^n)^{i-1}$.

In dem zweyten Glied von *N.* I. sezze man $a+bx^n-a$ statt bx^n, d. i. $(a+bx^n-a)x^{k-1}$ statt bx^{k+n-1}; so wird

III. $dv = (k+ni)\,x^{k-1}dx\,(a+bx^n)^i - niax^{k-1}dx\,(a+bx^n)^{i-1}$.

Weil nun $v = x^k(a+bx^n)^i$ ist; so erhält man aus

N. I., wenn $k = m+1$, und $i = p$ gesezt wird,

1.) $\int x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{1}{m+1} x^{m+1}(a+bx^n)^p$
$- \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} dx (a+bx^n)^{p-1}$.

Sezt man aber in ebendieser Formel $k = m+1-n$, und $i = p+1$; so wird

2.) $\int x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{1}{n(p+1)b} x^{m+1-n}(a+bx^n)^{p+1}$
$- \frac{m+1-n}{n(p+1)b} \int x^{m-n} dx (a+bx^n)^{p+1}$.

In *N.* II. sezze man $k = m+1$, und $i = p+1$; so erhält man

3.) $\int x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{1}{(m+1)a} x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}$
$- \frac{(m+1+np+n)b}{(m+1)a} \int x^{m+n} dx (a+bx^n)^p$,

und, wenn man in derselben Formel $k = m+1-n$, und $i = p+1$ macht,

4.) $\int x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{1}{(m+1+np)b} x^{m+1-n}(a+bx^n)^{p+1}$
$- \frac{(m+1-n)a}{(m+1+np)b} \int x^{m-n} dx (a+bx^n)^p$.

In *N.* III. sezze man $k = m+1$, $i = p$; so findet sich

5.) $\int x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{1}{m+1+np} x^{m+1}(a+bx^n)^p$
$+ \frac{npa}{m+1+p} \int x^m dx (a+bx^n)^{p-1}$.

Endlich sezze man in ebendieser Formel $k = m+1$, und $i = p+1$; so erhält man

6.) $\int x^m dx (a+bx^n)^p = -\frac{1}{n(p+1)a} x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}$
$+ \frac{m+1+np+n}{n(p+1)a} \int x^m dx (a+bx^n)^{p+1}$.

§. 128. Hieraus ergeben sich folgende Integralformeln.

1.) $\int \frac{dx\sqrt{x \pm a}}{x^r} = -\frac{\sqrt{x \pm a}}{(r-1)x^{r-1}} + \frac{1}{2(r-1)} \int \frac{dx}{x^{r-1}\sqrt{x \pm a}}$.

$$2.)\ \int \frac{dx}{x^r\sqrt{x \pm a}} = \mp \frac{\sqrt{x \pm a}}{(r-1)\,ax^{r-1}} \mp \frac{2r-3}{2(r-1)\,a} \int \frac{dx}{x^{r-1}\sqrt{x \pm a}}.$$

$$3.)\ \int \frac{dx\sqrt{a-x}}{x^r} = -\frac{\sqrt{a-x}}{(r-1)\,x^{r-1}} - \frac{1}{2(r-1)} \int \frac{dx}{x^{r-1}\sqrt{a-x}}.$$

$$4.)\ \int \frac{dx}{x^r\sqrt{a-x}} = -\frac{\sqrt{a-x}}{(r-1)\,ax^{r-1}} + \frac{2r-3}{2(r-1)\,a} \int \frac{dx}{x^{r-1}\sqrt{a-x}}.$$

Denn es ist $\frac{dx\sqrt{x \pm a}}{x^r} = x^{-r}dx\,(x+a)^{\frac{1}{2}}$. Man setze in der Formel n. 1. des vorhergehenden §. $m = -r$, $b = 1$, $n = 1$, $p = \frac{1}{2}$; so erhält man n. 1. Macht man aber $p = -\frac{1}{2}$, und behält das übrige bey; so erhält man aus §. 127. n. 3. die Formel n. 2. Die Formel n. 3. findet man, wenn man in der Formel n. 1. des vorhergehenden §. $m = -r$, $n = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $b = -1$ setzt. Endlich findet man die Formel n. 4., wenn man in der Formel §. 127. n. 3. setzt $m = -r$, $n = 1$, $p = -\frac{1}{2}$, und $b = -1$.

Ist r eine positive ganze Zahl; so wird die Integration dieser vier Differentialformeln nach und nach auf die Integrale von

$\frac{dx}{x\sqrt{x \pm a}}$, und $\frac{dx}{x\sqrt{a-x}}$ zurückgeführt, welche vermöge §. 125. durch die trigonometrischen Functionen und durch die Logarithmen gegeben sind.

§. 129. Auf ähnliche Art finden sich aus den allgemeinen Formeln des 127sten §. folgende.

$$1.)\ \int \frac{x^r dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{r} x^{r-1}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{r-1}{r} \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

$$2, a.)\ \int x^r dx\sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{r+2} x^{r+1}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{r+2} \int \frac{x^r dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$2, b.)\ = \frac{1}{r(r-2)} (rx^2 \pm a^2)\, x^{r-1}\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{(r-1)\,a^4}{r(r+2)} \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

3.) $\int \frac{x^r dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{r} x^{r-1}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{r-1}{r} a^2 \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

4, a.) $\int x^r dx \sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{r+2} x^{r+1}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{r+2}\int \frac{x^r dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

4, b.) $= \frac{1}{r(r+2)} (rx^2 - a^2) x^{r-1}\sqrt{a^2-x^2}$

$+ \frac{(r-1)a^4}{r(r+2)} \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

5.) $\int \frac{dx\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^r} = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{(r-1)x^{r-1}} + \frac{1}{r-1} \int \frac{dx}{x^{r-2}\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

6.) $\int \frac{dx}{x^r\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{(r-1)a^2 x^{r-1}} \mp \frac{r-2}{(r-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{r-2}\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

7.) $\int \frac{dx\sqrt{a^2-x^2}}{x^r} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(r-1)x^{r-1}} - \frac{1}{r-1} \int \frac{dx}{x^{r-2}\sqrt{a^2-x^2}}$.

8.) $\int \frac{dx}{x^r\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(r-1)a^2 x^{r-1}} + \frac{r-2}{(r-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{r-2}\sqrt{a^2-x^2}}$.

Wenn in den Formeln 1, 2, 3 und 4. der Exponent r eine ungerade positive ganze Zahl ist; so kommt man zulezt auf die Integrale von $\frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ und von $\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, welche nach §. 119. gefunden werden können. In diesem Fall werden also die Integrale algebraisch, übereinstimmend mit §. 120. n. 3. u. 4. Die Formeln n. 6. u. 8. werden ebenfalls algebraisch integrabel, wenn r eine gerade positive Zahl ist.

Erster Zusaz. Sezt man in den Formeln n. 2, *a*. und n. 4, *a*. den Exponenten $r = 0$ so findet man

$\int dx\sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$,

$= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \text{Lg.} \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{a}$ (§. 123. n. 1.)

$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2} a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

$= \frac{1}{2} x\sqrt{v^2-x^2} + \frac{1}{2} a^2 . \textit{Arc.}\,\text{Sin.} \frac{x}{a}$ (§. 122. n. 1.).

Zweyter Zusaz. Es ist, wenn man in der Formel n. 3. sezt $r = 2$, und $a = 1$,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

$$= -\tfrac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2} \textit{Arc.}\,\text{Sin.}\, x \text{ (} \text{12. n. 1.).}$$

Man setze $r = 4$; so wird

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{4} x^3 \sqrt{1-x^2} + \tfrac{3}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$ d. i. nach dem vorhergehenden

$$= -\tfrac{1}{4} x^3 \sqrt{1-x^2} - \frac{3.1}{4.2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{3.1}{4.2} \textit{Arc.}\,\text{Sin.}\, x.$$

Hienach ist ferner

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6} x^5 \sqrt{1-x^2} + \tfrac{5}{6} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$= -\frac{1}{6} x^5 \sqrt{1-x^2} - \frac{5.1}{6.4} x^3 \sqrt{1-x^2} - \frac{5.3.1}{6.4.2} x \sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{5.3.1}{6.4.2} \textit{Arc.}\,\text{Sin.}\, x.$$

$$\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{8} x^7 \sqrt{1-x^2} - \frac{7.1}{8.6} x^5 \sqrt{1-x^2}$$

$$- \frac{7.5.1}{8.6.4} x^3 \sqrt{1-x^2} - \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2} x \sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2} \textit{Arc.}\,\text{Sin.}\, x,$$

u. s. w. Soll das Integral für $x = 0$ verschwinden; so ist die Constante $= 0$. Hienach ist für jede positive ganze Zahl r, von $x = 0$ an bis $x = 1$, wo $\textit{Arc}\,\text{Sin.}\, x = \frac{1}{2}\pi$, und $\sqrt{1-x^2} = 0$ wird, der Werth von

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.7 \ldots (2r-1)}{2.4.6.8 \ldots 2r} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ferner erhält man aus n. 3., wenn man $r = 1$ sezt,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$ Man setze $r = 3$; so findet sich

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \tfrac{2}{3} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$= -\tfrac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} - \tfrac{2}{3} \sqrt{1-x^2}.$$

Für $r = 5$ findet man

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{5} x^4 \sqrt{1-x^2} + \tfrac{4}{5} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$= -\frac{1}{5} x^4 \sqrt{1-x^4} - \frac{4.1}{5.3} x^2 \sqrt{1-x^2}$$

$$- \frac{4.2}{5.3} \sqrt{1-x^2}.$$

Hienach wird

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{7} x^6 \sqrt{1-x^2} - \frac{6.1}{7.5} x^4 \sqrt{1-x^2}$$

$$- \frac{6.4.1}{7.5.3} x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{6.4.2}{7.5.3} \sqrt{1-x^2},$$

u. s. w. Soll das Integral für $x = 0$ verschwinden; so wird die Constante $\frac{6.4.2}{7.5.3}$ wenn der Exponent von x in dem Zähler $= 7$ oder $r = 3$ ist. Für $r = 4$ wird die Constante $= \frac{8.6.4.2}{9.7.5.3}$, u. s. w. Es ist also, von $x = 0$ an bis $x = 1$, der Werth von $\int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6 \ldots . 2r}{3.5.7 \ldots . (2r+1)}$.

Je größer r wird, desto mehr nähern sich die von $x = 0$ an bis $x = 1$ genommenen Integrale von $\frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ und von $\frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, und es ist daher die Gränze von $\frac{2.4.6.8 \ldots .}{3.5.7 \ldots .}$ gleich der Gränze von $\frac{1.3.5.7 \ldots .}{2.4.6.8 \ldots .} \cdot \frac{1}{2}\pi$,

mithin $\frac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10 \ldots .}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11 \ldots .}$,

$$\pi = 4 . \tfrac{8}{9} . \tfrac{24}{25} . \tfrac{48}{49} . \tfrac{80}{81} . \tfrac{120}{121} \ldots ,$$

$$= 4 (1 - \tfrac{1}{9})(1 - \tfrac{1}{25})(1 - \tfrac{1}{81})(1 - \tfrac{1}{121}) \ldots .$$

Oder auch $\pi = 2 . \tfrac{4}{3} . \tfrac{16}{15} . \tfrac{36}{35} . \tfrac{64}{63} . \tfrac{100}{99} \ldots ,$

$$= \frac{2}{\frac{3}{4} . \frac{15}{16} . \frac{35}{36} . \frac{63}{64} . \frac{99}{100} \ldots .},$$

$$= \frac{2}{(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{16})(1 - \frac{1}{36})(1 - \frac{1}{64}) \ldots .}.$$

§. 130. Weil $\frac{x^r dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}} = \frac{x^r dx}{\sqrt{x^r} \sqrt{x \pm 2a}} = x^{\frac{2r-1}{2}} dx (x \pm 2a)^{-\frac{1}{2}}$;

so ist nach §. 127. n. 4.

1.) $$\int \frac{x^r dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}} = \frac{1}{r} x^{r-1} \sqrt{x^2 \pm 2ax} \mp \frac{(2r-1)a}{r} \int \frac{x^{r-1} dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}},$$

und nach §. 127. n. 5.

$$2.)\ \int x^r dx \sqrt{x^2 \pm 2ax} = \frac{\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{r+2} \pm \frac{a}{r+2} \int \frac{x^{r+1} dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}},$$

$$= \frac{(r+1)x \pm a}{(r+1)(r+2)} x^r \sqrt{x^2 \pm 2ax}$$

$$- \frac{(2r+1)a^2}{(r+1)(r+2)} \int \frac{x^r dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}} \text{ (n. 1.)}$$

Auf ähnliche Art erhält man

$$3.)\ \int \frac{x^r dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{r} x^{r-1} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{2r-1}{r} a \int \frac{x^{r-1} dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

$$4.)\ \int x^r dx \sqrt{2ax - x^2} = \frac{(r+1)x - a}{(r+1)(r+2)} x^r \sqrt{2ax - x^2}$$

$$+ \frac{(2r+1)a^2}{(r=1)(r+2)} \int \frac{x^r dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

$$5.)\ \int \frac{dx}{x^r \sqrt{x^2 \pm 2ax}} = \mp \frac{1}{(2r-1)a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{x^r}$$

$$\mp \frac{r-1}{(2r-1)a} \int \frac{dx}{x^{r-1} \sqrt{x^2 \pm 2ax}}.$$

$$6.)\ \int \frac{dx \sqrt{x^2 \pm 2ax}}{x^r} = -\frac{1}{r-2} \frac{\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{x^{r-1}}$$

$$\mp \frac{a}{r-2} \int \frac{dx}{x^{r-1} \sqrt{x^2 \pm 2ax}}.$$

$$7.)\ \int \frac{dx}{x^r \sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{(2r-1)a} \cdot \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^r}$$

$$+ \frac{r-1}{(2r-1)a} \int \frac{dx}{x^{r-1} \sqrt{2ax - x^2}}.$$

$$8.)\ \int \frac{dx \sqrt{2ax - x^2}}{x^r} = -\frac{1}{r-1} \cdot \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^{r-1}}$$

$$- \frac{a}{r-2} \int \frac{dx}{x^{r-1} \sqrt{2ax - x^2}}.$$

Wenn r eine positive ganze Zahl ist; so werden die Integrale n. 5. und 7. algebraisch. Denn für $r = 1$ wird der Factor $r - 1 = 0$. Mittelst dieses Integral erhält man ferner das Integral für $r = 2$, u. s. w. Und wenn r eine

positive

positive ganze Zahl nicht kleiner als 3 ist; so werden auch die Integrale n. 6. u. 8. algebraisch, weil sie sich auf die so eben betrachtete zurükführen lassen. Hiemit stimmt das überein, was in dem 120sten §. gezeigt worden ist.

Zusaz. Aus n. 2. und 4. erhält man, wenn $r = 0$ gesezt wird,

$$\int dx \sqrt{x^2 \pm 2ax} = \frac{x \pm a}{2} \sqrt{x^2 \pm 2ax} - \tfrac{1}{2} a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 2ax}},$$

$$= \frac{x \pm a}{2} \sqrt{x^2 \pm 2ax} - \tfrac{1}{2} a^2 \text{Lg.} \left(\frac{x \pm a}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{x^2 \pm 2ax} \right),$$

(§. 123. n. 2.).

$$\int dx \sqrt{2ax - x^2} = \frac{x - a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

$$= -\frac{a - x}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 . \textit{Arc.} \text{ Sin. vers. } \frac{x}{a},$$

(§. 122. n. 4.).

§. 131. Die Differentialformeln von der Form $x^m dx (A + Bx + Cx^2)^p$ lassen sich durch schikliche Verwandlungen oder Substitutionen auf die Form der bisher betrachteten zurükführen. Es ist $A + Bx\ Cx^2 = A - \frac{1}{4} \frac{B^2}{C} + C(x + \frac{B}{2C})^2$; folglich wird, wenn man $x + \frac{B}{2C} = z$ sezt,

$$x^m dx (A + Bx + Cx^2)^p = (z - \frac{B}{2C})^m dz (A - \tfrac{1}{4} \frac{B^2}{C} + Cz^2)^p.$$

Ist nun m eine positive ganze Zahl; so erhält man, wenn zur Abkürzung $A - \frac{1}{4} \frac{B^2}{C} = k^2$ gesezt, und das Binomium $(z - \frac{B}{2C})^m$ entwickelt wird, Glieder von der Form $K . z^r dz (k^2 + Cz^2)^p$.

Hienach wird

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 + bx + cx^2}} = \frac{dz}{\sqrt{a^2 - \frac{1}{4} \frac{b^2}{c} + cz^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{d . z\sqrt{c}}{\sqrt{a^2 - \frac{1}{4} \frac{b^2}{c} + (z\sqrt{c})^2}}.$$

Da nun $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \text{Lg.} \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{x^2 \pm a^2} \right)$,

(§. 123. n. 1.), oder, wenn man die Constante - Lg. a weglässt, $= \text{Lg.}(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$; so ist

$$1.) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{Lg.}\left(\frac{b+2cx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a^2+bx+cx^2}\right) + \text{Const.}$$

Ebenso findet sich aus §. 122. n. 1.

$$2.) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \textit{Arc.}\,\text{Sin.} \frac{2cx-b}{\sqrt{4a^2c+b^2}} + \text{Const.}$$

Es sey $\frac{1}{x\sqrt{a^2+bx+cx^2}}$ zu integriren, und erstlich $c = \frac{b^2}{4a^2}$; so ist $\sqrt{a^2+bx+cx^2} = a + \frac{b}{2a}x$,

und $\frac{dx}{x\sqrt{a^2+bx+cx^2}} = \frac{dx}{x\left(a+\frac{bx}{2a}\right)} = \frac{1}{a}\left(\frac{dx}{x} - \frac{bdx}{2a^2+bx}\right)$.

Folglich ist

$$3, a.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+bx+cx^2}} = \frac{1}{a} \text{Lg.} \frac{x}{2a^2+bx} \text{ für } c = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Zweytens sey $c > \frac{b^2}{4a^2}$. Man setze $z = \frac{x\sqrt{4a^2c-b^2}}{2a^2+bx}$;

so wird $dz = \frac{2a^2\sqrt{4a^2c-b^2}}{(2a^2+bx)^2} \cdot dx$, und $1+z^2 = \frac{4a^2(a^2+bx+cx^2)}{(2a^2+bx)^2}$,

$z\sqrt{1+z^2} = \frac{\sqrt{4a^2c-b^2}}{(2a^2+bx)^2} \cdot 2ax\sqrt{a^2+bx+cx^2}$, mithin

$\frac{dx}{x\sqrt{a^2+bx+cx^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}$. Also ist, wenn man nach §. 123. n. 6. integrirt, und statt z wieder seinen Werth sezt,

$$3, b.) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+bx+cx^2}} = \frac{1}{a} \text{Lg.} \frac{2a\sqrt{a^2+bx+cx^2} - (2a^2+bx)}{x\sqrt{4a^2c-b^2}},$$

für $c > \frac{b^2}{4a^2}$.

Drittens sey $c < \frac{b^2}{4a^2}$. Man setze $z = \frac{x\sqrt{b^2-4a^2c}}{2a^2+bx}$; so wird $\frac{dx}{x\sqrt{a^2+bx+cx^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}}$, und nach §. 123. n. 5.

$$3,c.)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+bx+cx^2}} = \frac{1}{a}\text{Lg.}\frac{2a^2+bx-2a\sqrt{a^2+bx+cx^2}}{x\sqrt{b^2-4a^2c}},$$

für $c < \frac{b^2}{4a^2}$.

Ebenso findet man, wenn $z = \frac{x\sqrt{4a^2c+b^2}}{2a^2+bx}$ gesezt wird,

$$4.)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+bx-cx^2}} = \frac{1}{a}\text{Lg.}\frac{2a^2+bx-2a\sqrt{a^2+bx-cx^2}}{x\sqrt{4a^2c+b^2}},$$

und, wenn man $z = \frac{x\sqrt{4a^2c+b^2}}{2a^2-bx}$ sezt, nach §. 122. n. 3.

$$5.)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{cx^2+bx-a^2}} = \frac{1}{a}\ \textit{Arc.}\,\text{Sec.}\ \frac{x\sqrt{4a^2c+b^2}}{2a^2-bx}.$$

Weil $\frac{dx\sqrt{cx^2+bx-a^2}}{x} = \frac{(cx^2+bx-a^2)\,dx}{x\sqrt{cx^2+bx-a^2}} = \frac{(cx+\frac{1}{2}b)\,dx}{\sqrt{cx^2+bx-a^2}} + \frac{\frac{1}{2}b\,dx}{\sqrt{cx^2+bx-a^2}} - \frac{a^2dx}{x\sqrt{cx^2+bx-a^2}}$; so ist (§. 119. II. n. 1. 5. des gegenw. §.)

$$6.)\ \int \frac{dx}{x}\sqrt{cx^2+bx-a^2} = \sqrt{cx^2+bx-a^2} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\text{Lg.}\left(\frac{b+2cx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{cx^2+bx-a^2}\right) - a\,\textit{Arc.}\,\text{Sec.}\ \frac{x\sqrt{4a^2c+b^2}}{2a^2-bx}.$$

Ebenso ist $\frac{dx}{x}\sqrt{a^2+bx\pm cx^2} = \frac{(\frac{1}{2}b\pm cx)\,dx}{\sqrt{a^2+bx\pm cx^2}} + \frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{a^2+bx\pm cx^2}} + \frac{a^2dx}{x\sqrt{a^2+bx\pm cx^2}}$;

folglich $7.)\ \int \frac{dx}{x}\sqrt{a^2+bx+cx^2} = \sqrt{a^2+bx+cx^2} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\cdot\text{Lg.}\left(\frac{b+2cx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a^2+bx+cx^2}\right) + a\,\text{Lg.}\frac{2a\sqrt{a^2+bx+cx^2}-(2a^2+bx)}{x\sqrt{4a^2c-b^2}}$

für $4a^2c > b^2$;

$= \sqrt{a^2+bx+cx^2} +$

$$+\frac{b}{2\sqrt{c}}\,\mathrm{Lg.}\left(\frac{b+2cx}{2\sqrt{c}}+\sqrt{a^2+bx+cx^2}\right)$$

$$+a\,\mathrm{Lg.}\,\frac{2a^2+bx-2a\sqrt{a^2+bx+cx^2}}{x\sqrt{b^2-4a^2c}}$$

für $4a^2c < b^2$;

$$=a+\frac{b}{2a}x+a\,\mathrm{Lg.}\,\frac{x}{2a}\text{ für }4a^2c=b^2.$$

$$8.)\int\frac{dx}{x}\sqrt{a^2+bx-cx}=\sqrt{a^2+bx-cx^2}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\,\mathrm{Arc.Sin.}\,\frac{2cx-b}{\sqrt{4a^2c+b^2}}$$

$$+a\,\mathrm{Lg.}\,\frac{2a^2+bx-2a\sqrt{a^2+bx-cx^2}}{x\sqrt{4a^2c+b^2}}.$$

§. 132. Weil $d.x^m\sqrt{A+Bx+Cx^2}=mx^{m-1}dx\sqrt{A+Bx+Cx^2}$

$$\frac{(\frac{1}{2}B+Cx)x^m dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

$$=\frac{mx^{m-1}dx(A+Bx+Cx^2)}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}+\frac{(\frac{1}{2}B+Cx)x^m dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

$$=mA.\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}+\frac{2m+1}{2}B.\frac{x^m dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$$

$$+(m+1)C.\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}};$$ so

ist, wenn man $m+1=r$ sezt,

$$1.)\int\frac{x^r dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{x^{r-1}\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{rC}$$

$$-\frac{(2r-1)B}{2rC}\cdot\int\frac{x^{r-1}dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$$

$$-\frac{(r-1)A}{rC}\cdot\int\frac{x^{r-2}dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}.$$

Für $r=1$ ist das erste der hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Integrale aus dem vorhergehenden §. gegeben, und der Factor des zweyten verschwindet, und dadurch ist das Integral gefunden, welches xdx im Zähler hat. Sezt man jezt $r=2$; so werden die Zähler der hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Integrale xdx und dx. Mit-

hin ist auch dieses Integral gegeben, u. s. w. für jede positive ganze Zahl r.

Man setze in der allgemeinen Formel $m-1=-r$; so erhält man

$$2.)\int \frac{dx}{x^r\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = -\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{(r-1)Ax^{r-1}} - \frac{(2r-3)B}{2(r-1)A}\int \frac{dx}{x^{r-1}\sqrt{A+Bx+Cx^2}} - \frac{(r-2)C}{(r-1)A}\int \frac{dx}{x^{r-2}\sqrt{A+Bx+Cx^2}}.$$

Für $r=1$ ist das Integral aus dem vorhergehenden §. gegeben. Mittelst dieses erhält man das Integral für $r=2$, u. s. w. für jede positive ganze Zahl r.

Nach §. 113. findet man

$$3.)\int \frac{dx}{(A+Bx+Cx^2)^p} = \frac{2Cx+B}{(p-1)(4AC-B^2)(A+Bx+Cx^2)^{p-1}} + \frac{2(2p-3)}{(p-1)(4AC-B^2)}\cdot\int \frac{dx}{(A+Bx+Cx^2)^{p-1}}.$$

Sezt man in dieser Formel $p=\frac{3}{2}$; so wird $2p-3=0$, und das Integral algebraisch. Man findet also ferner das Integral für $p=\frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ u. s. w., mithin auch, wenn $p=\frac{2r+1}{2}$, und r irgend eine positive ganze Zahl >1 ist.

§. 133. Es sey $dy=Xdx(a+bx)^{\frac{m}{n}}$, X eine rationale Function von x, m und n seyen ganze Zahlen. Man setze $(a+bx)^{\frac{1}{n}}=z$, so werden

$$a+bx=z^n,$$

$$x=\frac{z^n-a}{b},$$

$$dx=\frac{n}{b}z^{n-1}dz,\quad (a+bx)^{\frac{m}{n}}dx=\frac{n}{b}z^{m+n-1}dz.$$

Da nun X eine rationale Function von x ist; so wird durch die Substitution von $\frac{z^n-a}{b}$ statt x die Function X eine

rationale Function von z. Heißt diese Function Z; so wird

$$dy = \frac{n}{b} Z . z^{m+n-1} dz ,$$

und die Integration dieser Formel ist auf die der rationalen Functionen zurükgeführt.

Wenn statt der Function X eine Function V gegeben wäre, welche nicht allein x, sondern auch die Größe $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ selbst, aber auf eine rationale Art enthielte; so würde durch die Substitution von $\frac{z^n - a}{b}$ statt x die Function V eine rationale Function von z, und man würde ebenfalls die Formel $\frac{n}{b} V . z^{n-1} dz$ integriren können.

Wenn $dy = Pdx$, und P eine rationale Function der Größen x, $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$, $(a+bx)^{\frac{p}{q}}$, $(a+bx)^{\frac{r}{s}}$, u. s. w.; so setze man $a+bx = z^{nqs} \cdots$. Alsdenn werden

$$(a+bx)^{\frac{1}{n}} = z^{qs}, \quad (a+bx)^{\frac{m}{n}} = z^{mqs},$$

$$(a+bx)^{\frac{1}{q}} = z^{ns}, \quad (a+bx)^{\frac{p}{q}} = z^{nqs},$$

$$(a+bx)^{\frac{1}{s}} = z^{nq}, \quad (a+bx)^{\frac{r}{s}} = z^{nqr},$$

$$bdx = nqsz^{nqs-1} dz ;$$

folglich wird durch diese Substitution

$$dy = F\left(\frac{z^{nqs} - a}{b}, z^{mqs}, z^{mqs}, z^{nqr} \ldots\right) \frac{nqs}{b} \cdot z^{nqs-1} dz,$$ mithin, weil F eine rationale Function bezeichnet, die Differentialformel $dy = Pdx$ rational.

Sey z. B. $dy = \frac{x}{a-x} dx (a+x)^{\frac{3}{2}}$; so wird, wenn man $x = z^2 - a$ setzt,

$$dy = \frac{2(z^2-a)}{2a-z^2} z^4 dz = 2. \frac{z^6 - az^4}{2a-z^2} dz,$$ und, wenn man mit $2a-z^2$ dividirt,

$$dy = -2z^4 dz - 2az^2 dz - 4a^2 dz + \frac{8a^3 dz}{2a-z^2};$$ also nach §. 105. u. §. 123. n. 3.

$$y = -\frac{2}{5}z^5 - \frac{2}{3}az^3 - 4a^2z + 2a^2\sqrt{2a} \times \text{Lg.}\frac{\sqrt{2a+z}}{\sqrt{2a-z}},$$

$$= 4a^2\sqrt{2a} \times \text{Lg.}\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}} - 2\left(\frac{(a+x)^2}{5} + \frac{a(a+x)}{3} + 2a^2\right)\sqrt{a+x}.$$

Sey $dy = \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{xdx}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}}$. Man setze $x = z^6 - 1$; so wird

$$dy = \frac{z^6-1}{z^2-z^5} \cdot 6z^5dz = -6z^3dz \cdot \frac{z^6-1}{z-1},$$

$$= 6dz(z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3),$$

$$y = -6\left(\frac{z^9}{9} + \frac{z^8}{8} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^6}{6} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^4}{4}\right) + C$$

$$= C - 6(1+x)^{\frac{2}{3}}\left(\tfrac{1}{9}(1+x)^{\frac{5}{6}} + \tfrac{1}{8}(1+x)^{\frac{2}{3}} + \ldots + \tfrac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{6}} + \tfrac{1}{4}\right).$$

§. 134. Auf ähnliche Art kann die Formel $dy = Xdx\left(\frac{a+bx}{b'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}}$ rational gemacht werden, wenn X eine rationale Function von x ist. Man setze $\frac{a+bx}{a'+b'x} = z^n$; so wird $x = \frac{a-a'z^n}{b'z^n-b}$, und $dx = \frac{n(a'b-ab')z^{n-1}dz}{(b'z^n-b)^2}$.

Ferner wird durch diese Substitution, weil X eine rationale Function von x ist, X eine rationale Function von z. Sie heiße Z; so wird

$$dy = Z.\frac{n(a'b-ab')}{(b'z^n-b)^2}z^{n-1}dz \cdot z^m = n(a'b-ab') \times \frac{Z.z^{m+n-1}dz}{(b'z^n-b)^2},$$

und man kann daher nach den in dem ersten Capitel gegebenen Regeln integriren.

Durch dieselbe Substitution wird diese Formel auch alsdenn rational, wenn X eine rationale Function von x und von $\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}}$ ist.

Wenn aber $dy = F(x, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots)dx$ wäre; so müßte man, um diese Formel rational zu machen, setzen $\frac{a+bx}{a'+b'x} = z^{nq\cdots}$. Alsdenn würden

$\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}} = z^{mq}$, $\left(\frac{a+bx}{a'+b}\right)^{\frac{p}{q}} = z^{np}$, und daher

$$dy = nq(a'b-ab') \times F\left(\frac{a-a'z^{nq}}{b'z^{nq}-b}, z^{mq}, z^{nq}, z^{np}\ldots\right) \cdot \frac{z^{nq-1}dz}{(b'z^{nq}-b)^2},$$

welche Formel rational ist, wenn F eine rationale Function von x, $\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}}$, u. s. w. ist.

Sey z. B. $dy = \frac{dx}{x}\left(\frac{a+x}{a'+x}\right)^{\frac{3}{2}}$. Man setze $\frac{a+x}{a'+x} = z^2$; so wird

$$dy = -2(a'+a) \cdot \frac{z^4 dz}{(a-a'z^2)(1+z^2)},$$

$$= 2\left(\frac{a'+a}{a'}\right)dz - 2\left(\frac{a'+a}{a'}\right) \times \frac{\left(\frac{a}{a'}-1\right)z^2 + \frac{a}{a'}}{\left(\frac{a}{a'}-z^2\right)(1+z^2)} \cdot dz,$$ wo

man das zweyte Glied in Brüche zerfällen kann, deren Nenner $\frac{a}{a'} - z^2$, und $1+z^2$ sind (§. 108.). Man kann also nach den in dem ersten Capitel gegebenen Regeln integriren.

§. 135. Sey $dy = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}}$. Man multiplicire Zähler und Nenner mit $\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2}$; so wird $dy = \frac{dx\sqrt{a^2+x^2} + dx\sqrt{a^2-x^2}}{2x^2} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x^2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{2}\frac{dx}{x^2}\sqrt{a^2-x^2}$, und man kann jezt nach §. 129. n. 5. u. 7. integriren.

Allgemein kann man eine Differentialformel rational machen, wenn sie nur zwey Wurzelgrößen von der Form $(a+bx)^{\frac{1}{n}}$, $(a'+b'x)^{\frac{1}{n}}$ enthält. Man setze $\frac{a+bx}{a'+b'x} = z^n$; so wird $x = \frac{a-a'z^n}{b'z^n-b}$, und daher, wenn $ab' > a'b$,

$$a+bx = \frac{(ab'-a'b)z^n}{b'z^n-b}, \quad a'+b'x = \frac{ab'-a'b}{b'z^n-b},$$

$\sqrt[n]{a+bx} = \sqrt[n]{ab'-a'b} \times \frac{z}{\sqrt[n]{b'z^n-b}}$,

$\sqrt[n]{a+b'x} = \sqrt[n]{ab'-a'b} \times \frac{1}{\sqrt[n]{b'z^n-b}}$. Für $ab' < a'b$, erhält man

$\sqrt[n]{a+bx} = -\sqrt[n]{a'b-ab'} \times \frac{z}{\sqrt[n]{b-b'z^n}}$,

$\sqrt[n]{a'+b'x} = -\sqrt[n]{a'b-ab'} \times \frac{1}{\sqrt[n]{b-b'z^n}}$. Nach dieser Substitution wird die Differentialformel nur noch die Irrationalgröße $\sqrt[n]{b'z^n-b}$ oder $\sqrt[n]{b-b'z^n}$ enthalten, welche nach den zwey vorhergehenden §. §. weggeschaft werden kann.

§. 136. Sey $dy = (x+\sqrt{a^2+x^2})^n dx$. Man setze $x+\sqrt{a^2+x^2} = z$; so wird

$x = \frac{z^2-a^2}{2z}$, und $dy = \frac{z^n(z^2+a^2)\,dz}{2z^2} = \frac{1}{2}z^n dz + \frac{1}{2}a^2 z^{n-2}dz$.

Für $n = 1$ ist also $y = \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Lg} z$,

$= \frac{1}{4}(x+\sqrt{a^2+x^2})^2 + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Lg}.(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

Für $n = -1$, $y = \frac{1}{2}\operatorname{Lg}. z - \frac{1}{4}\frac{a^2}{z^2}$,

$= \frac{1}{2}\operatorname{Lg}.(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \frac{a^2}{4(x+\sqrt{a^2+x^2})^2}$.

In den übrigen Fällen ist

$y = \frac{z^{n+1}}{2(n+1} + \frac{a^2 z^{n-1}}{2(n-1)}$,

$= \frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{a^2(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n-1}}{2(n-1)}$.

Weil $x = \frac{z^2-a^2}{2z}$; so ist $\sqrt{a^2+x^2} = \frac{z^2+a^2}{2z}$. Folglich kann durch diese Substitution auch die Formel $(x+\sqrt{a^2+x^2})^n X dx$ rational gemacht werden, wenn X

eine rationale Function von x, oder von $\sqrt{a^2+x^2}$, oder von beyden zugleich ist.

Wenn der Exponent n eine gebrochene Zahl $\frac{m}{r}$ ist; so setze man $x+\sqrt{a^2+x^2} = z^r$.

Alsdenn wird $x = \frac{z^{2r}-a^2}{2z^r}$, oder $\sqrt{\frac{z^r-x}{a^2+x^2}} \Big\} = \frac{z^{2r}+a^2}{2z^r}$,

und $dx = \frac{1}{2} r. \frac{z^{3r-1}+a^2z^{r-1}}{z^{2r}} dz$. Durch diese Substitution wird auch X eine rationale Function von z. Man bezeichne sie mit Z; so wird

$(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{m}{r}} Xdx = \frac{1}{2} r. Z(z^2+a^2) z^{m-r-1} dz$, und daher die ganze Formel rational.

§. 137. Wenn $dy = \left(\frac{a+bx^r}{a'+b'x^n}\right)^p dx$ ist; so muß der Zähler $(a+bx^r)^p$ nach dem Binomialtheorem in eine Reihe entwickelt werden, wodurch man eine Reihe Differentiale von der Form $\frac{x^m dx}{(a'+b'x^n)^p}$ erhält. Ein hieher gehöriges Beyspiel findet man in dem 95sten §. bey der Rectification der Ellipse und der Hyperbel.

Ebenso verfährt man mit dem Differential $\frac{dx}{(a+bx^r)^p(a'+b'x^n)^q}$, wo $(a+bx^r)^{-p}$, oder $(a'+b'x^n)^{-q}$ in eine Reihe aufzulösen ist. Es sey z. B.

$dy = \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(ax-x^2)}}$. Man entwikle die Irrationalgröße $\frac{1}{\sqrt{b-x}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{b}}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}$ mittelst des Binomialtheorems in eine Reihe; so wird

$$\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(ax-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\left(\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{1}{2.b}\frac{xdx}{\sqrt{ax-x^2}}\right.$$
$$\left. + \frac{1.3}{2.4.b^2}\frac{x^2dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.b^3}\frac{x^3dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \text{&c.}\right).$$

Es ist aber $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = Arc.\,\text{Sin. vers.}\,\frac{2x}{a}$ (§. 122. n. 4.),

und $\int \frac{x^r dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{1}{r}\,x^{r-1}\sqrt{ax-x^2} + \frac{2r-1}{2r}\,a\int \frac{x^{r-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}$,

(§. 130. n. 3.);

folglich $\int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\,Arc.\,\text{Sin. vers.}\,\frac{2x}{a} - \frac{1}{2b\sqrt{b}}\sqrt{ax-x^2}$

$+ \frac{1.1}{2.2.}\cdot\frac{a}{b\sqrt{b}}\,Arc.\,\text{Sin. vers.}\,\frac{2x}{a} - \frac{1.3}{2.4.b^2\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{2}x\sqrt{ax-x^2}$

$- \frac{1.3}{2.4.}\cdot\frac{3a}{4b^2\sqrt{b}}\sqrt{ax-x^2} + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\cdot\frac{a^2}{b^2\sqrt{b}}\,Arc.\,\text{Sin. v.}\,\frac{2x}{a}$

$-$ &e.

Soll dieses Integral mit x zugleich verschwinden; so darf keine Constante hinzugefügt werden. Sezt man $x = a$; so verschwinden die Wurzelgrößen, und aus $Arc.\,\text{Sin. vers.}\,\frac{2x}{a}$ wird $Arc.\,\text{Sin. vers.}\,2 = \pi$. Folglich ist der Werth des Integrals von $\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(ax-x^2)}}$, so genommen, daß es mit x zugleich verschwindet, für $x = a$ folgender Reihe gleich

$$\frac{\pi}{\sqrt{b}}\left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{a}{b} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{a^2}{b^2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{a^3}{b^3} + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\cdot\frac{a^4}{b^4} + \text{&c.}\right).$$

Drittes Capitel.

Von der Integration der Kreisfunctionen.

§. 138. Man sezze in den Differentialformeln n. 1. bis n. 6. des 30sten §. den Bogen $x = mv$; so wird $dx = mdv$, und

1.) $\int dv\,\text{Cos.}\,mv = \frac{1}{m}\,\text{Sin.}\,mv.$

2.) $\int dv\,\text{Sin.}\,mv = -\frac{1}{m}\,\text{Cos.}\,mv.$

3.) $\int \frac{dv}{\text{Cos.}\,mv^2} = \int dv\,\text{Sec.}\,mv^2 = \frac{1}{m}\,\text{Tg.}\,mv.$

4.) $\int \frac{dv}{\text{Sin. } mv^2} = \int dv \,\text{Cosec. } mv^2 = -\frac{1}{m} \text{Cotg. } mv.$

5.) $\int \frac{dv \,\text{Sin. } mv}{\text{Cos. } mv^2} = \int dv \,\text{Sin. } mv \,\text{Sec. } mv^2 = \frac{1}{m} \text{Sec. } mv,$

$= \frac{1}{m \,\text{Cos. } mv^2}$

6.) $\int \frac{dv \,\text{Cos. } mv}{\text{Sin. } mv^2} = \int dv \,\text{Cos. } mv \,\text{Cosec. } mv^2 = -\frac{1}{m} \text{Cosec. } mv,$

$= -\frac{1}{m \,\text{Sin. } mv^2}$

Hieraus erhält man ferner

7.) $\int (A + B \,\text{Cos. } v + C \,\text{Cos. } 2v + D \,\text{Cos. } 3v + \&c.)\, dv$

$= Av + B \,\text{Sin. } v + \frac{1}{2} C \,\text{Sin. } 2v + \frac{1}{3} D \,\text{Sin. } 3v + \&c.$

8.) $\int (A + B \,\text{Sin. } v + C \,\text{Sin. } 2v + D \,\text{Sin. } 3v + \&c.)\, dv$

$= Av - B \,\text{Cos. } v - \frac{1}{2} C \,\text{Cos. } 2v - \frac{1}{3} D \,\text{Cos. } 3v - \&c.$

§. 139. Es sey $y = \text{Sin. } v^i \,\text{Cos. } v^k$; so ist

$dy = idv \,\text{Cos. } v \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^k - kdv \,\text{Sin. } v \,\text{Cos. } v^{k-1} \,\text{Sin. } v^i,$

$= idv \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^{k+1} - kdv \,\text{Sin. } v^{i+1} \,\text{Cos. } v^{k-1}.$

In dem ersten Glied setze man $1 - \text{Sin. } v^2$ statt $\text{Cos. } v^2$,

d. i. $(1 - \text{Sin. } v^2) \,\text{Cos. } v^{k-1}$ statt $\text{Cos. } v^{k+1}$; so wird

$dy = idv \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^{k-1} - idv \,\text{Sin. } v^{i+1} \,\text{Cos. } v^{k-1}$

$- kdv \,\text{Sin. } v^{i+1} \,\text{Cos. } v^{k-1},$

oder A.) $d. \,\text{Sin. } v^i \,\text{Cos. } v^k = idv \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^{k-1}$

$- (i + k)\, dv \,\text{Sin. } v^{i+1} \,\text{Cos. } v^{k-1}.$

In dem zweyten Glied der obigen Formel setze man $(1 - \text{Cos. } v^2) \,\text{Sin. } v^{i-1}$ statt $\text{Sin. } v^{i+1}$; so wird

$dy = idv \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^{k+1} - kdv \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^{k-1}$

$+ kdv \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^{k+1},$

oder B.) $d. \,\text{Sin. } v^i \,\text{Cos. } v^k = (i + k)\, dv \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^{k+1}$

$- kdv \,\text{Sin. } v^{i-1} \,\text{Cos. } v^{k-1}.$

Wird in der Formel A geſezt $k = 1$, und $i + 1 = m$; ſo erhält man

1.) $\int dv \overline{\text{Sin.}\, v}^{m} = -\frac{1}{m} \overline{\text{Sin.}\, v}^{m-1} \text{Cos.}\, v + \frac{m-1}{m} \int dv \overline{\text{Sin.}\, v}^{m-2}$.

In der Formel B ſetze man $i = 1$ und $k + 1 = m$; ſo findet man

2.) $\int dv \overline{\text{Cos.}\, v}^{m} = \frac{1}{m} \overline{\text{Cos.}\, v}^{m-1} \text{Sin.}\, v + \frac{m-1}{m} \int dv \overline{\text{Cos.}\, v}^{m-2}$.

Wenn m eine ungerade Zahl iſt; ſo kommt man zulezt auf die Integrale von $dv \text{Sin.}\, v$ und $dv \text{Cos.}\, v$, das iſt auf $-\text{Cos.}\, v$ und $+\text{Sin.}\, v$. In dieſem Fall ſind alſo die Integrale n. 1. u 2. algebraiſch. Iſt aber m eine gerade Zahl; ſo kommt man auf $\int dv$ d. i. auf v, und die Integrale ſind transſcendent.

Hieraus folgende Integrale.

$\int dv \text{Sin.}\, v = -\text{Cos.}\, v$.

$\int dv \overline{\text{Sin.}\, v}^{2} = -\frac{1}{2} \text{Sin.}\, v \text{Cos.}\, v + \frac{1}{2} v$.

$\int dv \overline{\text{Sin.}\, v}^{3} = -\frac{1}{3} \overline{\text{Sin.}\, v}^{2} \text{Cos.}\, v - \frac{2}{3} \text{Cos.}\, v$.

$\int dv \overline{\text{Sin.}\, v}^{4} = -\frac{1}{4} \overline{\text{Sin.}\, v}^{3} \text{Cos.}\, v - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \text{Sin.}\, v \text{Cos.}\, v + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot v$.

$\int dv \overline{\text{Sin.}\, v}^{5} = -\frac{1}{5} \overline{\text{Sin.}\, v}^{4} \text{Cos.}\, v - \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} \overline{\text{Sin.}\, v}^{2} \text{Cos.}\, v - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \text{Cos.}\, v$.

$\int dv \overline{\text{Sin.}\, v}^{6} = -\frac{1}{6} \overline{\text{Sin.}\, \varphi}^{5} \text{Cos.}\, v - \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 6} \overline{\text{Sin.}\, \varphi}^{3} \text{Cos.}\, v - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \text{Sin.}\, v \text{Cos.}\, v - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot v$.

u. ſ. w.

$\int dv \text{Cos.}\, v = \text{Sin.}\, v$.

$\int dv \overline{\text{Cos.}\, v}^{2} = \frac{1}{2} \text{Sin.}\, v \text{Cos.}\, v + \frac{1}{2} v$.

$\int dv \overline{\text{Cos.}\, v}^{3} = \frac{1}{3} \text{Sin.}\, v \overline{\text{Cos.}\, v}^{2} + \frac{2}{3} \text{Sin.}\, v$.

$\int dv \overline{\text{Cos.}\, v}^{4} = \frac{1}{4} \text{Sin.}\, v \overline{\text{Cos.}\, v}^{3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \text{Sin.}\, v \text{Cos.}\, v + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot v$.

$\int dv \overline{\text{Cos.}\, v}^{5} = \frac{1}{5} \text{Sin.}\, v \overline{\text{Cos.}\, v}^{4} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} \text{Sin.}\, v \overline{\text{Cos.}\, v}^{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \text{Sin.}\, v$.

$$\int dv\,\overline{\text{Cos.}v}^{6} = \tfrac{1}{6}\text{Sin.}v\,\overline{\text{Cos.}v}^{5} + \tfrac{1\cdot5}{4\cdot6}\text{Sin.}v\,\overline{\text{Cos.}v}^{3} + \tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\text{Sin.}v\,\text{Cos.}v + \tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot v.$$

u. s. w.

§. 140. Weil $dv\,\text{Tang.}\,v = \frac{dv\,\text{Sin.}\,v}{\text{Cos.}\,v} = -\frac{d.\,\text{Cos.}\,v}{\text{Cos.}\,v} =$ $d.\,\text{Lg.}\,\text{Cos.}\,v$ (§. 29. n. 4. u. §. 39.)

so ist 1.) $\int dv\,\text{Tg.}\,v = C - \text{Lg.}\,\text{Cos.}\,v$

Ferner ist $d.\,\text{Tg.}\,\overline{v}^{m-1} = (m-1)\,\text{Tg.}\,\overline{v}^{m-2}.(1+\text{Tg.}\,\overline{v^2})\,dv,$

$$= (m-1)\,\text{Tg.}\,\overline{v}^{m-2}\,dv + (m-1)\,\text{Tg.}\,\overline{v}^{m}\,dv;$$

folglich 2.) $\int \text{Tg.}\,\overline{v}^{m}\,dv = \frac{1}{m-1}\,\text{Tg.}\,\overline{v}^{m-1} + \int \text{Tg.}\,\overline{v}^{m-2}\,dv.$

Ebenso findet man 3.) $\int dv\,\text{Cotg.}\,v = \text{Lg.}\,\text{Sin.}\,v,$

und 4.) $\int dv\,\text{Cotg.}\,\overline{v}^{m} = -\frac{1}{m-1}\,\text{Cotg.}\,\overline{v}^{m-1} - \int dv\,\text{Cotg.}\,\overline{v}^{m-2}.$

Weil $dv\,\text{Sec.}\,v = \frac{dv}{\text{Cos.}\,v} = \frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{\overline{\text{Cos.}\,v^2}} = \frac{d.\,\text{Sin.}\,v}{1-\overline{\text{Sin.}\,v^2}}$; so ist, wenn man in §. 123. n. 3. setzt $a=1$, und $x=\text{Sin}\,v$,

$$5.)\ \left.\begin{matrix}\int dv\,\text{Sec.}\,v \\ \int \frac{dv}{\text{Cos.}\,v}\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\,\text{Lg.}\,\frac{1+\text{Sin.}\,v}{1-\text{Sin.}\,v} = \text{Lg.}\,\text{Tg.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}v).$$

Und weil $d.\,\text{Tg.}\,v\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m-2} = dv\,\overline{\text{Sec.}\,v^2}\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m-2}$

$$+ (m-2)\,\text{Tg.}\,v\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m-3}\,dv\,\text{Sec.}\,v\,\text{Tg.}\,v,$$

$$= dv\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m} + (m-2)\,\overline{\text{Tg.}\,v^2}\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m-2}\,dv,$$

$$= dv\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m} + (m-2)(\overline{\text{Sec.}\,v^2}-1)\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m-2}\,dv,$$

$$= (m-1)\,dv\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m} - (m-2)\,dv\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m-2};$$

$$\text{so ist 6.)}\ \left.\begin{matrix}\int dv\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m} \\ \int \frac{dv}{\overline{\text{Cos.}\,v}^{m}}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{m-1}\,\text{Tg.}\,v\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m-2} + \frac{m-2}{m-1}\int dv\,\overline{\text{Sec.}\,v}^{m-2}.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$7.)\ \left.\begin{matrix}\int dv\,\mathrm{Cosec.}\,v \\ \int \frac{dv}{\mathrm{Sin.}\,v}\end{matrix}\right\} = \mathrm{Lg.\,Tg.}\,\tfrac{1}{2}v,$$

$$\text{und } 8.)\ \left.\begin{matrix}\int dv\,\overline{\mathrm{Cosec.}\,v}^{m} \\ \int \frac{dv}{\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m}}\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{m-1}\,\mathrm{Cotg.}\,v\,\overline{\mathrm{Cosec.}\,v}^{m-2} + \frac{m-2}{m-1}\int dv\,\overline{\mathrm{Cosec.}\,v}^{m-2}.$$

§. 141. In der Formel *A*, §. 139. setze man $i+1=m$, und $k-1=n$; so wird

$$1.)\ \int dv\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n} = -\frac{1}{m+n}\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m-1}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n+1} + \frac{m-1}{m+n}\int dv\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m-2}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n}.$$

Für $m=1$ wird $\int dv\,\mathrm{Sin.}\,v\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n} = -\frac{1}{n+1}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n+1}$.

$m=2$; $\int dv\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{2}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n} = -\frac{1}{n+2}\,\mathrm{Sin.}\,v\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n+1} + \frac{1}{n+2}\int dv\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n}$.

$$m=3;\ \int dv\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{3}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n} = -\frac{1}{n+3}\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{2}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n+1} + \frac{2}{n+3}\int dv\,\mathrm{Sin.}\,v\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n},$$

$$= -\frac{1}{n+3}\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{2}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n+1} - \frac{1.2}{(n+1)(n+3)}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n+1}.$$

u. s. w.

Das Integral von $dv\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n}$, auf welches man zuletzt kommt, wenn m eine gerade Zahl ist, findet man nach §. 139. n. 2.

In der Formel *B*, §. 139. setze man $i-1=m$, und $k+1=n$; so wird

$$2.)\ \int dv\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n}\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m} = \frac{1}{m+n}\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m+1}\,\overline{\mathrm{Cos}\,v}^{n-1} + \frac{n-1}{m+n}\int dv\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m}\,\overline{\mathrm{Cos.}\,v}^{n-2},$$

und für $n=1$; $\int dv\,\mathrm{Cos.}\,v\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m} = \frac{1}{m+1}\,\overline{\mathrm{Sin.}\,v}^{m+1}$.

$n=2$; $\int dv \overline{\text{Cos.}v}^2 \overline{\text{Sin.}v}^m = \frac{1}{m+2} \overline{\text{Sin.}v}^{m+1} \text{Cos.}v + \frac{1}{m+2} \int dv \overline{\text{Sin.}v}^m$.

u. s. w.

Das Integral von $dv \overline{\text{Sin.}v}^m$, auf welches man zulezt kommt, wenn n eine gerade Zahl ist, findet man nach §. 139. n. 1.

In der Formel A des 139sten §. sezze man $i+1=m$, und $k-1=-n$; so erhält man

$$3.) \int \frac{dv \overline{\text{Sin.}v}^m}{\overline{\text{Cos.}v}^n} = -\frac{1}{m-n} \cdot \frac{\overline{\text{Sin.}v}^{m-1}}{\overline{\text{Cos.}v}^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \cdot \int \frac{dv \overline{\text{Sin.}v}^{m-2}}{\overline{\text{Cos.}v}^n}.$$

In der Formel B werde $i-1=-n$, und $k+1=m$ gesezt; so kommt

$$4.) \int \frac{dv \overline{\text{Cos.}v}^m}{\overline{\text{Sin.}v}^n} = \frac{1}{m-n} \cdot \frac{\overline{\text{Cos.}v}^{m-1}}{\overline{\text{Sin.}v}^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \cdot \int \frac{dv \overline{\text{Cos.}v}^{m-1}}{\overline{\text{Sin.}v}^n}.$$

Man sezt $m=1, 2, 3.$ u. s. w. und verfährt, wie in den vorhergehenden Fällen.

Endlich, weil $\frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^m \overline{\text{Cos.}v}^n} = \frac{(\overline{\text{Sin.}v}^2 + \overline{\text{Cos.}v}^2)\,dv}{\overline{\text{Sin.}v}^m \overline{\text{Cos.}v}^n}$,

$$= \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^{m-2} \overline{\text{Cos.}v}^n} + \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^n \overline{\text{Cos.}v}^{n-2}};$$

so ist $5.) \int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^m \overline{\text{Cos.}v}^n} = \int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^{m-2} \overline{\text{Cos.}v}^n} + \int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^m \overline{\text{Cos.}v}^{n-2}}$,

und für $\left.\begin{matrix} m=1 \\ n=1 \end{matrix}\right\} \int \frac{dv}{\text{Sin.}v \text{Cos.}v} = \int \frac{dv \text{Sin.}v}{\text{Cos.}v} + \int \frac{dv \text{Cos.}v}{\text{Sin.}v}$,

$= -\text{Lg.Cos.}v + \text{Lg.Sin.}v$ (§. 140. n. 1. u. 3.),

$= \text{Lg. Tg.}v.$

$$\left.\begin{matrix} m=2 \\ n=1 \end{matrix}\right\} \int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^2 \text{Cos.}v} = \int \frac{dv}{\text{Cos.}v} + \int \frac{dv \text{Cos.}v}{\overline{\text{Sin.}v}^2},$$

$= \text{Lg. Tg.}(45° + \frac{1}{2}v) - \text{Cosec.}v,$

(§. 140. n. 5. u. §. 138. n. 5.).

$$\left.\begin{matrix} m=2 \\ n=2 \end{matrix}\right\} \int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^2 \overline{\text{Cos.}v}^2} = \int \frac{dv}{\overline{\text{Cos.}v}^2} + \int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v}^2},$$

$= \text{Tg.}v - \text{Cotg.}v$ (§. 138. n. 3. u. 4.),

$= -2 \text{Cotg.}2v.$

$m=3$

$$\left.\begin{matrix} m=3 \\ n=1 \end{matrix}\right\} \int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v^3}\,\text{Cos.}v} = \int \frac{dv}{\text{Sin.}v\,\text{Cos.}v} + \int \frac{dv\,\text{Cos.}v}{\overline{\text{Sin.}v^3}},$$

$$= \text{Lg. Tg.}\,v - \tfrac{1}{2}\overline{\text{Cosec.}\,v^2}.,$$

das zweyte Glied nach n. 4.

Man setze in den Formeln A u. B des 139sten §. $i-1 = -m$, $k-1 = -n$; so erhält man

$$6.) \int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v^m}\,\overline{\text{Cos.}v^2}} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{1}{\overline{\text{Sin.}v^{m-1}}\,\overline{\text{Cos.}v^{m-1}}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v^{m-2}}\,\overline{\text{Cos.}v^n}},$$

$$7.) = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\overline{\text{Sin.}v^{m-1}}\,\overline{\text{Cos.}v^{n-1}}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dv}{\overline{\text{Sin.}v^m}\,\overline{\text{Cos.}v^{n-2}}},$$

mittelst welcher Formeln ebenfalls das Integral u. 5. gefunden werden kann, nur dürfen nicht zugleich m und $n = 1$ seyn.

§. 142. Es ist $\frac{dv}{1+\text{Cos.}v} = \frac{1}{2}\,dv\,\overline{\text{Sec.}\,\tfrac{1}{2}v^2}$; folglich (§. 138. n. 3.)

$$1.) \int \frac{dv}{1+\text{Cos.}v} = \text{Tg}\,\tfrac{1}{2}v.$$

Und weil $\frac{dv}{1-\text{Cos.}v} = \frac{1}{2}\,dv\,\overline{\text{Cosec.}\,\tfrac{1}{2}v^2}$; so ist (§. 138. n. 4.)

$$2.) \int \frac{dv}{1-\text{Cos.}v} = -\,\text{Cotg.}\,\tfrac{1}{2}v.$$

Ferner ist $\frac{dv}{1+m\,\text{Cos.}v} = \frac{dv}{(m+1)\,\overline{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}v^2} - (m-1)\,\overline{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}v^2}}$,

$$= \frac{dv\,\overline{\text{Sec.}\,\tfrac{1}{2}v^2}}{m+1-(m-1)\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}v^2},$$

$$= \frac{2}{m-1}\cdot\frac{d.\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}v}{\frac{m+1}{m-1} - \overline{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}v^2}} \text{ für } m > 1,$$

$$= \frac{2}{1-m}\cdot\frac{d.\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}v}{\frac{1+m}{1-m} + \overline{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}v^2}} \text{ für } m < 1.$$

Also ist, wenn $m > 1$, nach §. 123. n. 3.

$$3.) \int \frac{dv}{1+m\,\text{Cos.}v} = \frac{1}{(m-1)\sqrt{\frac{m+1}{m-1}}}\,\text{Lg.}\,\frac{\sqrt{\frac{m+1}{m-1}} + \text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}v}{\sqrt{\frac{m+1}{m-1}} - \text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}v},$$

$$= \frac{2}{\sqrt{m^2-1}} \text{Lg.} \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}v\sqrt{m+1} + \text{Sin.}\frac{1}{2}v\sqrt{m-1}}{\sqrt{1+m\,\text{Cos.}\,v}}.$$

Für $m < 1$ findet man nach §. 122. n. 2.

$$4.) \int \frac{dv}{1+m\,\text{Cos.}\,v} = \frac{2}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \textit{Arc.}\,\text{Tg.}\left(\text{Tg.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right).$$

Wenn m negativ ist; so ist $\frac{dv}{1-m\,\text{Cos.}\,v} = \frac{dv\,\text{Cosec.}\frac{1}{2}v^2}{m+1-(m-1)\,\text{Cotg.}\frac{1}{2}v^2}$,

$$= -\frac{2}{m-1} \cdot \frac{d.\,\text{Cotg.}\frac{1}{2}v}{\frac{m+1}{m-1} - \text{Cotg.}\frac{1}{2}v^2} \text{ für } m > 1,$$

$$= -\frac{2}{1-m} \cdot \frac{d.\,\text{Cotg.}\frac{1}{2}v}{\frac{1+m}{1-m} + \text{Cotg.}\frac{1}{2}v^2} \text{ für } m < 1.$$

Also ist wie vorhin, wenn $m > 1$,

$$5.) \int \frac{dv}{1-m\,\text{Cos.}\,v} = \frac{1}{(m-1)\sqrt{\frac{m+1}{m-1}}} \text{Lg.} \frac{\sqrt{\frac{m+1}{m-1}} - \text{Cotg.}\frac{1}{2}v}{\sqrt{\frac{m+1}{m-1}} + \text{Cotg.}\frac{1}{2}v},$$

$$= \frac{2}{\sqrt{m^2-1}} \text{Lg.} \frac{\sqrt{1-m\,\text{Cos.}\,v}}{\text{Sin.}\frac{1}{2}v\sqrt{m+1} + \text{Cos.}\frac{1}{2}v\sqrt{m-1}}.$$

Für $m < 1$ erhält man

$$6.) \int \frac{dv}{1-m\,\text{Cos.}\,v} = -\frac{2}{\sqrt{1-m^2}} \textit{Arc.}\,\text{Tg.}\left(\text{Cotg.}\tfrac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right).$$

Weil $\frac{dv\,\text{Sin.}\,v}{1 \pm m\,\text{Cos.}\,v} = -\frac{d.\,\text{Cos.}\,v}{1 \pm m\,\text{Cos.}\,v}$; so ist

$$7.) \int \frac{dv\,\text{Sin.}\,v}{1+m\,\text{Cos.}\,v} = -\frac{1}{m}\,\text{Lg.}(1+m\,\text{Cos.}\,v),$$

$$\int \frac{dv\,\text{Sin.}\,v}{1-m\,\text{Cos.}\,v} = \frac{1}{m}\,\text{Lg.}(1-m\,\text{Cos.}\,v).$$

Endlich ist $\frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{1 \pm m\,\text{Cos.}\,v} = \pm\frac{1}{m}\,dv\left(1 - \frac{1}{1 \pm m\,\text{Cos.}\,v}\right)$; folglich

$$8.) \int \frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{1+m\,\text{Cos.}\,v} = \frac{1}{m}v - \frac{1}{m}\int \frac{dv}{1+m\,\text{Cos.}\,v},$$

$$\int \frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{1-m\,\text{Cos.}\,v} = -\frac{1}{m}v + \frac{1}{m}\int \frac{dv}{1-m\,\text{Cos.}\,v}, \text{ wo die}$$

zweyten Glieder nach n. 3, 4, 5, und 6. integrirt werden können.

§. 143. Weil $d.\frac{\text{Sin. } v}{1 \pm m\text{Cos. } v} = \frac{dv\text{Cos. } v(1 \pm m\text{Cos. } v) \pm m dv\overline{\text{Sin. } v^2}}{(1 \pm m\text{ Cos. } v)^2}$,

$$= \frac{dv\,\text{Cos. } v \pm m dv}{(1 \pm m\text{ Cos. } v)^2}\text{; so find}$$

$$d.\frac{\text{Sin. } v}{1 + m\text{ Cos. } v} = \frac{\frac{1}{m}(1 + m\text{ Cos. } v)\,dv + \left(m - \frac{1}{m}\right)dv}{(1 + m\text{ Cos. } v)^2},$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{dv}{1 + m\text{Cos. } v} + \frac{m^2 - 1}{m} \cdot \frac{dv}{(1 + m\text{ Cos. } v)^2},$$

$$\text{und } d.\frac{\text{Sin. } v}{1 - m\text{Cos. } v} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{dv}{1 - m\text{ Cos. } v} - \frac{m^2 - 1}{m} \cdot \frac{dv}{(1 - m\text{ Cos. } v)^2}.$$

Folglich ist 1.) $\int \frac{dv}{(1 \pm m\text{ Cos. } v)^2} = \pm \frac{m}{m^2 - 1} \cdot \frac{\text{Sin. } v}{1 \pm m\text{ Cos. } v}$

$$- \frac{1}{m^2 - 1} \int \frac{dv}{1 \pm m\text{Cos. } v},$$ wo das zweyte Glied nach dem vorhergehenden §. integrirt werden kann.

Weil $\frac{dv\,\text{Sin. } v}{(1 + m\text{Cos. } v)^n} = -\frac{1}{m} \cdot \frac{d.\,m\text{ Cos. } v}{(1 + m\text{ Cos. } v)^n}$; so ist

(§. 106. pag. 235.)

2.) $\int \frac{dv\,\text{Sin. } v}{1 + m\text{ Cos. } v} = -\frac{1}{m}\text{ Lg.}(1 + m\text{ Cos. } v)$,

$$\int \frac{dv\,\text{Sin. } v}{(1 + m\text{ Cos. } v)^n} = \frac{1}{m(n-1)(1 + m\text{ Cos. } v)^{n-1}}.$$

Weil $d.\frac{\text{Cos. } v}{(1 + m\text{ Cos. } v)^{n-1}} = -\frac{dv\,\text{Sin. } v}{(1 + m\text{Cos. } v)^{n-1}}$

$$+ \frac{m(n-1)\,dv\,\text{Sin } v\,\text{Cos. } v}{(1 + m\text{ Cos. } v)^n}\text{; so ist}$$

3.) $\int \frac{dv\,\text{Sin. } v\,\text{Cos. } v}{(1 + m\text{ Cos. } v)^n} = m\frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{\text{Cos. } v}{(1 + m\text{ Cos. } v)^{n-1}}$

$$+ \frac{1}{m(n-1)} \int \frac{dv\,\text{Sin. } v}{(1 + m\text{ Cos. } v)^{n-1}},$$ wo das zweyte Glied nach n. 2. integrirt werden kann.

4.) Um $\frac{dv\,\text{Cos. } v}{(1 + m\text{Cos. } 2v)^n}$ zu integriren, setze man $\text{Sin. } v =$ $\text{Sin. } w\sqrt{\frac{m+1}{2m}}$; so werden $dv\,\text{Cos. } v = dw\,\text{Cos. } w\sqrt{\frac{m+1}{2m}}$,

$\text{Cos.}\,2v = 1 - 2\,\overline{\text{Sin.}\,v}^2 = 1 - \frac{m+1}{m}\,\overline{\text{Sin.}\,w}^2$, und daher

$\frac{dv\,\text{Cos.}\,v}{(1+m\,\text{Cos.}\,2v)^n} = dw\,\overline{\text{Sec.}\,w}^{2n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2m(m+1)^{2n-1}}}$. Folglich kann man nach §. 140. n. 6. integriren.

§. 144. Sey $\int \frac{dv\,(a'+b'\,\text{Cos.}\,v)}{(a+b\,\text{Cos.}\,v)^n} = \frac{A\,\text{Sin.}\,v}{(a+b\,\text{Cos.}\,v)^{n-1}} + \int \frac{dv\,(B+C.\,\text{Cos.}\,v)}{(a+b\,\text{Cos.}\,v)^{n-1}}$;

so ist, wenn man differentiirt, und mit dv dividirt,

$$\frac{a'+b'\,\text{Cos.}\,v}{(a+b\,\text{Cos.}\,v)^n} = \frac{A\,\text{Cos.}\,v}{(a+b\,\text{Cos.}\,v)^{n-1}} + \frac{(n-1)\,Ab\,\overline{\text{Sin.}\,v}^2}{(a+b\,\text{Cos.}\,v)^n} + \frac{B+C.\,\text{Cos.}\,v}{(a+b\,\text{Cos.}\,v)^{n-1}},$$

und, wenn man mit $(a+b\,\text{Cos.}\,v)^n$ multiplicirt, $1-\overline{\text{Cos.}\,v}^2$ statt $\overline{\text{Sin.}\,v}^2$ sezt, und alle Glieder auf einerley Seite des Gleichheitszeichens bringt,

$$\left.\begin{matrix}(n-1)\,Ab + Aa \\ +Ba + Bb \\ -a' + Ca \\ -b'\end{matrix}\right\}\text{Cos.}\,v \left.\begin{matrix}-(n-2)\,Ab \\ +bC\end{matrix}\right\}\overline{\text{Cos.}\,v}^2 = 0,$$ woraus

man nach der Methode der unbestimmten Coefficienten die Gleichungen erhält

$$(n-1)\,Ab + Ba - a' = 0,$$
$$Aa + Bb + Ca - b' = 0,$$
$$-(n-2)\,Ab + bC = 0.$$

Löst man diese Gleichungen auf; so finden sich

$$A = \frac{ab \quad a'b}{(n-1)(a^2-b^2)},\quad B = \frac{aa'-bb'}{a^2-b^2},\quad C = \frac{(n-2)(ab'-a'b)}{(n-1)(a^2-b^2)}.$$

Da nun A, B, und C gegeben sind, so reducirt sich zulezt, wenn n eine ganze positive Zahl ist, das Integral von $\frac{dv\,(a'+b'\,\text{Cos.}\,v)}{(a+b\,\text{Cos.}\,v)^n}$ auf ein Integral von der Form $\frac{dv\,(K+L.\,\text{Cos.}\,v)}{a+b\,\text{Cos.}\,v}$, oder auf die Integrale von

von $\frac{K}{a} \cdot \frac{dv}{1 + \frac{b}{a} \text{Cos.} v}$ und von $\frac{L}{a} \cdot \frac{dv \text{ Cos.} v}{1 + \frac{b}{a} \text{Cos.} v}$, welche nach §. 142. gefunden werden können.

Wenn der Exponent eine gebrochene Zahl ist; so entwickelt man den Nenner in eine Reihe, welche nach den Potenzen von Cos. v oder nach den Sinus und Cosinus der vielfachen von v fortgeht, und integrirt die Glieder der Reihe nach §. 138. oder §. 139.

§. 145. Sey $dy = Xdx$ *Arc.* Sin. $\frac{x}{a}$, X eine Function von x und $\int Xdx = P$.

Da $d.P$ *Arc.* Sin. $\frac{x}{a} = dP$ *Arc.* Sin. $\frac{x}{a} + \frac{Pdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

$= Xdx$. *Arc.* Sin. $\frac{x}{a} + \frac{Pdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

so ist $\int Xdx$ *Arc.* Sin. $\frac{x}{a} = P$. *Arc.* Sin. $\frac{x}{a} - \int \frac{Pdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, und die Integration dieser Formel reducirt sich auf die Integration von Xdx und von $\frac{dx \int Xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Sey z. B. $dy = x^m dx$ *Arc.* Sin. $\frac{x}{a}$; so ist $P = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$, und daher

$$y = \frac{x^{m+1} \text{ Arc. Sin.} \frac{x}{a}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wo das zweyte Glied nach den in dem zweyten Capitel gegebenen Regeln integrirt werden kann.

Auf ähnliche Art verfährt man mit den Formeln Xdx *Arc.* Tg. $\frac{x}{a}$, Xdx *Arc.* Sin. vers. $\frac{x}{a}$, u. s. w.

Man setze *Arc.* Sin. $\frac{x}{a} = v$; so wird $x = a$ Sin. v, $dx = adv$ Cos. v, und X wird eine Function V von Sin. v. Folglich wird man, wenn $\int Vdv$ Cos. $v = V'$ gesezt wird, haben $\int a.V.vdv$ Cos. $v = aV'.v - a \int V' dv$.

Sey z. B. $V = \overline{\text{Sin.}\, v}^{m}$; so ist $\int V dv \,\text{Cos.}\, v =$

$\int \overline{\text{Sin.}\, v}^{m} dv \,\text{Cos.}\, v = \frac{1}{m+1} \overline{\text{Sin.}\, v}^{m+1} = V'$, und

$\int \overline{\text{Sin.}\, v}^{m} . v dv \,\text{Cos.}\, v = \frac{v \,\text{Sin.}\, v^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \overline{\text{Sin.}\, v}^{m+1} dv$, wo das zweyte Glied nach §. 139. integrirt werden kann.

§ 146. Sey $dy = X dx . v^n$, und v ein Bogen, dessen, Sinus, Tangente, u. s. w. so wie X eine gegebene Function von x sey; so wird man haben $\frac{dv}{dx} =$ einer gegebenen Function fx von x. Man setze das Integral von $Xdx = P$. Da $d. Pv^n = dP . v^n + nPv^{n-1} dv$,

$= Xdx . v^n + nP . fx . v^{n-1} dx$, weil $dv = dx . fx$; so ist

$\int Xdx . v^n = v^n \int Xdx - n \int P . fx . v^{n-1} dx$, und man kommt, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, und die Integrale von Xdx. $P . fx . dx$ u. s. w. angegeben werden können, zuletzt auf eine Integralformel, welche kein v enthält, indem man zuerst $n = 1$, hernach $n = 2$ u. s. w. sezt.

Wenn z. B. $v = Arc.\,\text{Sin.}\, x$ für den Halbmesser 1, oder $\text{Sin.}\, v = x$; so ist

1.) $\int (Arc.\,\text{Sin.}\, x)^n dx$

$= (Arc.\,\text{Sin.}\, x)^n . x - n . \int (Arc.\,\text{Sin.}\, x.)^{n-1} . \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, und

2.) $\int (Arc.\,\text{Sin.}\, x.)^{n-1} . \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -(Arc.\,\text{Sin.}\, x)^{n-1} \sqrt{1-x^2}$

$+ (n-1) \int Arc.\,\text{Sin.}\, x)^{n-2} dx$,

mithin 3.) $\int (Arc.\,\text{Sin.}\, x)^n dx = x\,(Arc.\,\text{Sin.}\, x)^n$

$+ n (Arc.\,\text{Sin.}\, x)^{n-1} \sqrt{1-x^2}$

$- n(n-1) \int (Arc.\,\text{Sin.}\, x)^{n-2} dx.$

Für $n = 1$ findet man nach n. 1.

$\int dx\,(Arc.\,\text{Sin.}\, x) = x . Arc.\,\text{Sin.}\, x + \sqrt{1-x^2}$,

und, wenn $n > 1$ findet man nach n. 3.

für $n = 2$; $\int dx\,(Arc.\,\text{Sin.}\, x)^2 = x (Arc.\,\text{Sin.}\, x)^2$

$- 2\,(Arc.\,\text{Sin.}\, x) \sqrt{1-x^2} - 2 . 1 . x$

Für $n = 3$; $\int dx\,(Arc.\,\mathrm{Sin.}\,x)^3 = x\,(Arc.\,\mathrm{Sin.}\,x)^3$
$+ 3\,(Arc.\,\mathrm{Sin.}\,x)^2\sqrt{1-x^2}$
$- 3.2.x.\,Arc.\,\mathrm{Sin.}\,x - 3.2.1.\sqrt{1-x^2}$,

u. s. w.

Auf ähnliche Art findet man

4.) $\int v^n dv\,\mathrm{Sin.}\,v = -v^n\,\mathrm{Cos.}\,v + n\int v^{n-1}dv\,\mathrm{Cos.}\,v$,

5.) $\int v^n dv\,\mathrm{Cos.}\,v = v^n\,\mathrm{Sin.}\,v - n\int v^{n-1}dv\,\mathrm{Sin.}\,v$, und daher

6.) $\int v^n dv\,\mathrm{Sin.}\,v = -v^n\,\mathrm{Cos.}\,v + nv^{n-1}\,\mathrm{Sin.}\,v$
$-n(n-1)\int v^{n-2}dv\,\mathrm{Sin.}\,v.$

Viertes Capitel.

Von der Integration der logarithmischen und exponentiellen Functionen.

§. 147. Sey $dy = Xdx\,\mathrm{Lg.}\,x^n$, X eine Function von x, und $\int Xdx = P$; so ist

$d.P\,\mathrm{Lg.}\,x^n = dP\,\mathrm{Lg.}\,x^n + nP\,\mathrm{Lg.}\,x^{n-1}.\frac{dx}{x}$, und daher

1.) $\int Xdx\,\mathrm{Lg.}\,x^n = P\,\mathrm{Lg.}\,x^n - n\int \frac{P\,\mathrm{Lg.}\,x^{n-1}}{x}\,dx.$

Für $X = x^m$ wird also

$$\int x^m dx\,\mathrm{Lg.}\,x^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\mathrm{Lg.}\,x^n - \frac{n}{m+1}\int x^m dx.\,\mathrm{Lg.}\,x^{n-1}.$$

Man setze $n = 1$; so erhält man

$$\int x^m dx\,\mathrm{Lg.}\,x = \frac{x^{m+1}\,\mathrm{Lg.}\,x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2},$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\mathrm{Lg.}\,x - \frac{1}{m+1}\right).$$

Für $n = 2$ wird

$$\int x^m dx\,\mathrm{Lg.}\,x^2 = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\mathrm{Lg.}\,x^2 - \frac{2}{m+1}\int x^m dx\,\mathrm{Lg.}\,x,$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\mathrm{Lg.}\,x^2 - \frac{2x^{m+1}}{(m+1)^2}\left(\mathrm{Lg.}\,x - \frac{1}{m+1}\right),$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\overline{\text{Lg.}x}^2 - \frac{2\,\text{Lg.}x}{m+1} + \frac{2}{(m+1)^2}\right).$$

Allgemein $\int x^m dx \overline{\text{Lg.}x}^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\overline{\text{Lg.}x}^n - \frac{n\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}}{m+1} + \frac{n(n-1)\overline{\text{Lg.}x}^{n-2}}{(m+1)^2} \cdots \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{(m+1)^r}\overline{\text{Lg.}x}^{n-r} \mp \&c.\right)$.

Wenn der Exponent n eine negative Zahl, oder $dy = \frac{Xdx}{\overline{\text{Lg.}x}^n}$ ist; so hat man $dy = Xxdx.\frac{dx}{x\overline{\text{Lg.}x}^n}$. Es ist aber $\int \frac{dx}{x\overline{\text{Lg.}x}^n} = \int \frac{d.\text{Lg.}x}{\overline{\text{Lg.}x}^n} = \int \overline{\text{Lg.}x}^{-n} d.\text{Lg.}x = -\frac{1}{(n-1)\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}}$ (§. 106. pag. 235.), und $d.\frac{Xx}{(n-1)\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}}$

$$= \frac{d.(Xx)}{(n-1)\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}} - \frac{Xx}{\overline{\text{Lg.}x}^n}\cdot\frac{dx}{x};$$

folglich 2.) $\int \frac{Xdx}{\overline{\text{Lg.}x}^n} = -\frac{Xx}{(n-1)\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{d.(Xx)}{\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}}$.

Für $X = x^m$ wird

$$\int \frac{x^m dx}{\overline{\text{Lg.}x}^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}}.$$

Hieraus erhält man

$$\int \frac{x^m dx}{\overline{\text{Lg.}x}^n} = -\frac{x^{m+1}}{n-1}\left(\frac{1}{\overline{\text{Lg.}x}^{n-1}} + \frac{m+1}{(n-2)\overline{\text{Lg.}x}^{n-2}} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)\overline{\text{Lg.}x}^{n-3}} \cdots + \frac{(m+1)^{r-1}}{(n-2)\ldots(n-r)\overline{\text{Lg.}x}^{n-r}} + \&c.\right) + \frac{(m+1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\int \frac{x^m dx}{\text{Lg.}x}.$$

Man kommt also zulezt auf das Integral von $\frac{x^m dx}{\text{Lg.}x}$, welches nur mittelst der Entwiklung in Reihen gefunden werden kann. Sezt man $x^{m+1} = z$; so wird $\frac{x^m dx}{\text{Lg.}x} = \frac{dz}{\text{Lg.}e}$. Es ist aber, wenn der natürliche Logarithme von $z = u$, und die Basis des natürlichen Logarithmensystems $= e$ gesezt wird, $z = e^u$, und daher

$$\frac{dz}{\text{Lg. } z} = \frac{e^u du}{u} = \left(\frac{1}{u} + 1 + \frac{u}{1.2} + \frac{u^2}{1.2.3} + \ldots + \frac{u^{r-1}}{1.2..r} + \&c.\right),$$

(§. 29. n. 5.);

folglich $\int \frac{e^u du}{u} = \text{Lg. } u + u + \frac{u^2}{2.1.2} + \frac{u^3}{3.1.2.3} + \ldots \frac{u^r}{r.1.2..r} + \&c.$

und 3.) $\int \frac{dz}{\text{Lg. } z} = \text{Lg. Lg. } z + \frac{\text{Lg. } z}{1} + \frac{1}{2}\frac{\overline{\text{Lg. } z}^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{\overline{\text{Lg. } z}^3}{1.2.3} + \ldots$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\overline{\text{Lg. } z}^r}{1.2.3 \ldots r} + \&c.$$

Da nun $x^{m+1} = z$; so ist $(m+1)\text{Lg. } x = \text{Lg. } z$, und $\text{Lg.}(m+1) + \text{Lg. Lg. } x = \text{Lg. Lg. } z$; folglich

4.) $\int \frac{x^m dx}{\text{Lg. } x} = \text{Lg.}(m+1) + \text{Lg. Lg. } x + \frac{m+1}{1} \cdot \text{Lg. } x$

$$+ \frac{(m+1)^2}{2} \cdot \frac{\overline{\text{Lg. } x}^2}{1.2} + \ldots$$

$$+ \frac{(m+1)^r}{r} \cdot \frac{\overline{\text{Lg. } x}^r}{1.2 \ldots r} + \&c.$$

Wenn $m = -1$ ist, hat man

5.) $\int \frac{dx}{x \text{ Lg. } x} = \int \frac{d. \text{Lg. } x}{\text{Lg. } x} = \text{Lg. Lg. } x.$

und 6.) $\int \frac{dx}{x} \overline{\text{Lg. } x}^n = \frac{1}{n+1} \overline{\text{Lg. } x}^{n+1}.$

Sey $dy = X dx \text{ Lg. } Q$, und Q eine Function von x. Man setze $\int X dx = P$. Da $d.P \text{ Lg. } Q = dP \text{ Lg. } Q + P\frac{dQ}{Q}$ $= X dx \text{ Lg. } Q + P\frac{dQ}{Q}$; so ist

7.) $\int X dx \text{ Lg. } Q = P \text{Lg. } Q - \int \frac{P dQ}{Q}.$

Wenn z. B. $dy = \frac{a^2 dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ Lg. } \sqrt{a^2 - x^2}$; so ist

$P = \int \frac{a^2 dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ (§. 129. n. 8.),

und $\frac{dQ}{Q} = -\frac{x}{a^2 - x^2}$. Folglich ist

$$y = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \text{Lg.} \sqrt{a^2 - x^2} - Arc. \text{Sin.} \frac{x}{a} \text{ (§. 122. n. 1.).}$$

§. 148. Weil $d.a^x = a^x dx \operatorname{Lg}.a$ (§. 29. n. 1.); so ist

1.) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\operatorname{Lg}.a}$,

2.) $\int a^{nx} dx = \frac{a^{nx}}{n \operatorname{Lg}.a}$.

Sey $F(a^x)$ eine Function von a^x. Man setze $a^x = u$; so wird $a^x dx \operatorname{Lg}.a = du$, $dx = \frac{du}{a^x \operatorname{Lg}.a} = \frac{du}{u \operatorname{Lg}.a}$, und daher

3.) $\int dx.F(a^x) = \frac{1}{\operatorname{Lg}.a} \int \frac{F(u)}{u} du$.

Wenn z. B. $dy = dx\sqrt{a^{2x} - c^2}$; so wird, wenn man $a^x = u$ sezt,

$dy = \frac{1}{\operatorname{Lg}.a} \cdot \frac{du}{u}\sqrt{u^2 - c^2}$, und $y = \frac{1}{\operatorname{Lg}.a}\left(\sqrt{u^2 - c^2} - c \operatorname{Arc}\operatorname{Sec}.\frac{u}{c}\right)$,

(§. 126. n. 2.),

oder $y = \frac{1}{\operatorname{Lg}.a}\left(\sqrt{a^{2x} - c^2} - c.\operatorname{Arc}.\operatorname{Sec}.\frac{a^x}{c}\right)$.

Weil $d.X.a^x = Xa^x dx \operatorname{Lg}.a + a^x d.X$; so ist, wenn man $\frac{d.X}{dx} = X'$ sezt,

4.) $\int Xa^x dx = \frac{Xa^x}{\operatorname{Lg}.a} - \frac{1}{\operatorname{Lg}.a} \int a^x.X' dx$. Man setze $\frac{d.X'}{dx}$ oder $\frac{d^2X}{dx^2} = X''$; so ist hienach

$\int X'a^x dx = \frac{X'ax}{\operatorname{Lg}.a} - \frac{1}{\operatorname{Lg}.a} \int a^x.X'' dx$, und daher

$\int Xa^x dx = \frac{Xa^x}{\operatorname{Lg}.a} - \frac{X'a^x}{\operatorname{Lg}.a^2} + \frac{1}{\operatorname{Lg}.a^2} \int a^x X'' dx$. Sey $\frac{d^r.X}{dx^r} = X^{(r)}$; so findet man

5.) $\int Xa^x dx = \frac{a^x}{\operatorname{Lg}.a}\left(X - \frac{X'}{\operatorname{Lg}.a} + \frac{X''}{\operatorname{Lg}.a^2} - \frac{X'''}{\operatorname{Lg}.a^3} + \cdots \mp \frac{X^{(r-1)}}{\operatorname{Lg}.a^{r-1}}\right) \mp \frac{1}{\operatorname{Lg}.a^r} \int a^x.X^{(r)} dx$.

Wenn X eine rationale ganze Funktion von x der $n$ten Ordnung ist; so ist $\frac{d^n \cdot X}{dx^n} = \text{Const.}$, und man kommt zulezt auf das Integral von $a^x dx$, welches $= \frac{a^x}{\text{Lg. } a}$ ist (n. 1.). Hienach ist

$$7.) \int x^n a^x dx = \frac{a^x}{\text{Lg. } a}\left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{\text{Lg. } a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\overline{\text{Lg. } a}^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{\overline{\text{Lg. } a}^3} \ldots \right.$$
$$\left. \mp \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-2))x^{r-1}}{\overline{\text{Lg. } a}^{r-1}}\right)$$
$$\pm \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{\overline{\text{Lg. } a}^r} \int a^x x^{n-r} dx.$$

Wenn der Exponent n eine positive ganze Zahl ist; so wird für $r = n$ das lezte Glied dieser Reihe

$$= \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{\overline{\text{Lg. } a}^r} \int a^x dx,$$

$$= \pm \frac{1.2\ldots(n-1)n}{\overline{\text{Lg. } a}^{r+1}} a^x, \text{ (n. 1.)}.$$

Weil $d. \frac{a^x}{x^{n-1}} = \frac{a^x dx \text{ Lg. } a}{x^{n-1}} - \frac{(n-1)a^x}{x^n} dx$; so ist

$$8.) \int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\text{Lg. } a}{n-1} \int \frac{a^x dx}{x^{n-1}}.$$

Wenn der Exponent n eine ganze Zahl ist; so führt die Entwiklung dieses Integrals zulezt auf $\int \frac{a^x dx}{x}$, welches nur durch die Entwiklung von a^x in Reihe näherungsweise kann gegeben werden. Es ist nemlich

$$a^x = 1 + x\text{Lg. } a + \frac{x^2 \overline{\text{Lg. } a}^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^r \overline{\text{Lg. } a}^r}{1.2\ldots r} + \&c.$$

(§. 27. n. 1., weil $A = \text{Lg. } a$, §. 29.), und daher

$$9.) \int \frac{a^x dx}{x} = \text{Lg. } x + \frac{x}{1} \cdot \frac{\text{Lg. } a}{1} + \frac{x^2}{1.2} \frac{\overline{\text{Lg. } a}^2}{2} + \ldots.$$
$$+ \frac{x^r}{1.2\ldots r} \frac{\overline{\text{Lg. } a}^r}{r} + \&c.$$

§. 149. Wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet; so ist

$$d.e^{mv}\overline{\text{Sin.}v}^{n} = me^{mv}dv\overline{\text{Sin.}v}^{n} + ne^{mv}dv\,\text{Cos.}v\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-1}.$$

Ferner ist

$$d.e^{mv}\text{Cos.}v\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-1} = me^{mv}dv\text{Cos.}v\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-1} - e^{mv}dv\,\overline{\text{Sin.}v}^{n}$$
$$+ (n-1)e^{mv}dv\,\overline{\text{Cos.}v}^{2}\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-2},$$
$$= me^{mv}dv\,\text{Cos.}v\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-1} + (n-1)e^{mv}dv\overline{\text{Sin.}v}^{n-2}$$
$$- ne^{mv}dv\,\overline{\text{Sin.}v}^{n},$$ wenn man in dem lezten Glied des vorhergehenden Ausdruks $1 - \overline{\text{Sin.}v}^{2}$ statt $\overline{\text{Cos.}v}^{2}$ sezt.

Von dem Produkt der ersten dieser Gleichungen durch m ziehe man das Produkt der zweyten durch n ab; so erhält man

$$md.e^{mv}\overline{\text{Sin.}v}^{n} - nd.e^{mv}\text{Cos.}v\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-1} = (m^2+n^2)e^{mv}dv\overline{\text{Sin.}v}^{n}$$
$$- n(n-1)e^{mv}dv\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-2}.$$ Folglich ist

$$1.)\ \int e^{mv}dv\,\overline{\text{Sin.}v}^{n} = \frac{e^{mv}\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-1}(m\,\text{Sin.}v - n\,\text{Cos.}v)}{m^2+n^2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\cdot\int e^{mv}dv\,\overline{\text{Sin.}v}^{n-2}.$$

Hienach ist $\int e^{mv}dv\,\text{Sin.}v = \frac{e^{mv}(m\,\text{Sin.}v - \text{Cos.}v)}{m^2+1}$.

$$\int e^{mv}dv\,\overline{\text{Sin.}v}^{2} = \frac{e^{mv}\,\text{Sin.}v\,(m\,\text{Sin.}v - 2\,\text{Cos.}v)}{m^2+4} - \frac{2.1}{m^2+4}\cdot\frac{e^{mv}}{m}.$$

$$\int e^{mv}dv\,\overline{\text{Sin.}v}^{3} = \frac{e^{mv}\,\overline{\text{Sin.}v}^{2}(m\,\text{Sin.}v - 3\,\text{Cos.}v)}{m^2+9}$$
$$+ \frac{3.2.e^{mv}(m\,\text{Sin.}v - \text{Cos.}v)}{(m^2+9)(m^2+1)}.$$

$$\int e^{mv}dv\,\overline{\text{Sin.}v}^{4} = \frac{e^{mv}\,\overline{\text{Sin.}v}^{3}(m\,\text{Sin.}v - 4\,\text{Cos.}v)}{m^2+16}$$
$$+ \frac{4.3.e^{mv}\,\text{Sin.}v\,(m\,\text{Sin.}v - 2\,\text{Cos.}v)}{(m^2+16)(m^2+4)} +$$

$$+\frac{4.3.2.1.\,e^{mv}}{(m^2+16)(m^2+4).m^4}$$

u. s. w.

Eben so findet man, wenn man die Ausdrücke $e^{mv}\overline{\text{Cos.}\,v}^{n}$ und $e^{mv}\text{Sin.}\,v\,\overline{\text{Cos.}\,v}^{n-1}$ differentiirt, das erste Differential mit m, das zweyte mit n multiplicirt, und sie hierauf addirt,

$$2.)\ \int e^{mv}\overline{\text{Cos.}\,v}^{n} = \frac{e^{mv}\overline{\text{Cos.}\,v}^{n-1}(m\,\text{Cos.}\,v+n\,\text{Sin.}\,v)}{m^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{mv}dv\,\overline{\text{Cos.}\,v}^{n-2}.$$

Hienach ist $\int e^{mv}dv\,\text{Cos.}\,v = \frac{e^{mv}(m\,\text{Cos.}\,v+\text{Sin.}\,v)}{m^2+1}$.

$$\int e^{mv}dv\,\overline{\text{Cos.}\,v}^{2} = \frac{e^{mv}\,\text{Cos.}\,v\,(m\,\text{Cos.}\,v+2\,\text{Sin.}\,v)}{m^2+4} + \frac{2.1}{m^2+4}\cdot\frac{e^{mv}}{m}.$$

$$\int e^{mv}dv\,\overline{\text{Cos}\,v}^{3} = \frac{e^{mv}\overline{\text{Cos.}\,v}^{n-2}(m\,\text{Cos.}\,v+3\,\text{Sin.}\,v)}{m^2+9} + \frac{3.2.e^{mv}(m\,\text{Cos.}\,v+\text{Sin.}\,v)}{(m^2+9)(m^2+1)}.$$

$$\int e^{mv}dv\,\overline{\text{Cos.}\,v}^{4} = \frac{e^{mv}\overline{\text{Cos.}\,v}^{3}(m\,\text{Cos.}\,v+4\,\text{Sin.}\,v)}{m^2+16} + \frac{4.3.e^{mv}\,\text{Cos.}\,v\,(m\,\text{Cos.}\,v+2\text{Sin.}\,v)}{(m^2+16)(m^2+4)} + \frac{4.3.2.1.\,e^{mv}}{(m^2+16)(m^2+4).m^4}$$

Sey $dy = e^{mv}dv\,\text{Sin.}\,kv$. Man setze $kv=u$; so wird $dy=\frac{1}{k}e^{\frac{m}{k}u}du\,\text{Sin.}\,u$, und nach n. 1., wenn man $n=1$ setzt, $y=\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{\frac{m}{k}u}\left(\frac{m}{k}\,\text{Sin.}\,u-\text{Cos.}\,u\right)}{\frac{m^2}{k^2}+1}$

$$=\frac{e^{\frac{m}{k}u}(m\,\text{Sin.}\,u-k\,\text{Cos.}\,u)}{m^2+k^2}.$$ Folglich ist

3.) $\int e^{mv} dv \operatorname{Sin.} kv = \frac{e^{mv}(m \operatorname{Sin.} kv - k \operatorname{Cos.} kv)}{m^2 + k^2}$.

Eben so findet man aus n. 2.

4.) $\int e^{mv} dv \operatorname{Cos.} kv = \frac{e^{mv}(m \operatorname{Cos.} kv + \operatorname{Sin.} kv)}{m^2 + k^2}$.

Mittelst dieser Formeln können ebenfalls die Integrale n. 1. u. 2. gefunden werden, wenn man die Potenzen der Sinus und Cosinus durch die Sinus und Cosinus der vielfachen von v ausdrükt. Durch dasselbe Verfahren erhält man das Integral von $e^{mv} dv \operatorname{Sin.} \overline{v}^n \operatorname{Cos.} \overline{v}^r$, wenn n und r positive ganze Zahlen sind.

Fünftes Capitel.

Von den Integrationen durch Annäherung.

§. 150. Sey Fx irgend eine Function von x, und $\frac{d.Fx}{dx} = F'x$, $\frac{d^2.Fx}{dx^2} = F''x$, u. s. w.; so ist nach dem Taylorischen Theorem

$$F(x+\Delta x) - Fx = \Delta x\, F'x + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2} F''x + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3} Fx''' + \&c.$$

$$F(x+2\Delta x) - F(x+\Delta x) = \Delta x F'(x+\Delta x) + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2} F''(x+\Delta x) + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3} F'''(x+\Delta x) + \&c.$$

$$\vdots$$

$$F(x+n\Delta x) - F(x+(n-1)\Delta x) = \Delta x F'(x+(n-1)\Delta x) + \frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2} F''(x+(n-1)\Delta x) + \frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3} F'''(x+(n-1)\Delta x) + \&c.$$

und daher, wenn man diese Reihen addirt,

1.) $F(x+n\Delta x) - Fx = \frac{\Delta x}{1}(F'x + F'(x+\Delta x) + \ldots + F'(x+(n-1)\Delta x))$

$$+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}(F''x+F''(x+\Delta x)+\ldots+F''(x+(n-1)\Delta x))$$

$$+\frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}(F'''x+F'''(x+\Delta x)+\ldots+F'''(x+(n-1)\Delta x))$$

$$+ \&c.$$

Es ist auch

$F(x+n\Delta x)-F(x+(n-1)\Delta x)=F(x+n\Delta x)-F(x+n\Delta x-\Delta x)$,

und daher, wenn man in der Taylorischen Reihe Δx negativ sezt,

$$F(x+n\Delta x)-F(x+(n-1)\Delta x)=\frac{\Delta x}{1}F'(x+n\Delta x)$$
$$-\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}F''(x+n\Delta x)+\frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}F'''(x+n\Delta x)-\&c.$$

$$F(x+(n-1)\Delta x)-F(x+(n-2)\Delta x)=\frac{\Delta x}{1}F'(x+(n-1)\Delta x)$$
$$-\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}F''(x+(n-1)\Delta x)+\frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}F'''(x+(n-1)\Delta x)-\&c.$$

$$\vdots$$

$$F(x+\Delta x)-Fx=\frac{\Delta x}{1}F'(x+\Delta x)-\frac{\Delta x^2}{1.2.}F''(x+\Delta x)$$
$$+\frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}F'''(x+\Delta x)-\&c.$$

Folglich ist

2.) $F(x+n\Delta x)-Fx=\frac{\Delta x}{1}(F'(x+\Delta x)+F'(x+2\Delta x)+\ldots$
$+F'(x+n\Delta x))$
$-\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2.}(F''(x+\Delta x)+F''(x+2\Delta x)+\ldots+F''(x+n\Delta x))$
$+\frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}(F'''(x+\Delta x)+F'''(x+2\Delta x)+\ldots+F'''(x+n\Delta x))$
$-\&c.$

Man nehme die halbe Summe der Reihen n. 1. u. 2; so erhält man

3.) $F(x+n\Delta x)-Fx=\frac{\Delta x}{1}\Big(F(x+\Delta x)+\ldots+F'(x+(n-1)\Delta x)$
$+\frac{F'x+F'(x+n\Delta x)}{2}\Big)$

$$+\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2}\left(\frac{F''x+F''(x+\Delta x)}{2}\right)$$

$$+\frac{\overline{\Delta x}^3}{1.2.3}\left(F'''(x+\Delta x)+\ldots+F'''(x+(n-1)\Delta x)\right.$$

$$\left.+\frac{F''x+F'''(x+n\Delta x)}{2}\right)$$

$$+\text{ \&c.}$$

Da nun $F'x=\frac{d.Fx}{dx}$; so ist $Fx=\int dx.F'x$, und, wenn man $n\Delta x=z$ sezt, $F(x+n\Delta x)-Fx$ oder $F(x+z)-Fx$ der bestimmte Werth des Integrals von $dx.F'x$ zwischen den Gränzen $x+0$ und $x+z$, wo z die Stelle der veränderlichen Größe, und x die Stelle einer gegebenen Größe vertritt, für welche das Integral verschwinden soll. Wenn man also den Werth von $\int dx.F'x$ verlangt von einem gegebenen Werth a von x an bis $x=b$; so sezze man in den Reihen n. 1, 2, oder 3.

$$x=a$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Alsdenn werden $\overline{\Delta x}^2=\frac{(b-a)^2}{n^2}$, $\overline{\Delta x}^3=\frac{(b-a)^3}{n^3}$, u. s. w. unter übrigens gleichen Umständen desto kleiner, je kleiner n ist, und die Reihen für $Fb-Fa$ werden desto geschwinder convergiren, in je mehrere gleiche Theile man die Größe $b-a$ eintheilt.

§. 151. Betrachtet man $F'x$ als die zu der Abscisse x gehörige rechtwinklichte Ordinate einer krummen Linie; so ist $F(x+z)-Fx$, oder das zwischen den Gränzen x und $x+z$ genommene Integral von $dx.Fx$ der durch die Ordinaten $F'x$, $F'(x+z)$, das Segment z der Axe der Abscissen und den Bogen der krummen Linie begränzte Flächenraum (§. 91.). Man theile den Abschnitt z der Axe in n gleiche Theile, so sind die den Abscissen $x+\frac{z}{n}$, $x+\frac{2z}{n}$, $x+\frac{n-1}{n}z$, oder $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$ u. s. w. entsprechende

Ordi-

Ordinaten beziehungsweise $F'(x+\Delta x)$, $F'(x+2\Delta x)\ldots$ $F'(x+(n-1)\Delta x)$, und die Summe der Producte $\Delta x F'x$, $\Delta x F'(x+\Delta x)\ldots$ $\Delta x F'(x+(n-1)\Delta x)$ ist die Summe der in oder um die Figur beschriebenen Rechtecke, je nachdem $F'x$ mit x zugleich wächst oder abnimmt. Ebenso ist die Summe der Producte $\Delta x F'(x+\Delta x)\ldots \Delta x F'(x+n\Delta x)$ die Summe der um oder in die Figur beschriebenen Rechtecke, je nachdem $F'x$ mit x zugleich wächst oder abnimmt. Diese Summen nähern sich dem durch die krumme Linie, durch die erste und lezte Ordinate und durch das Segment der Axe begränzten Flächenraum desto mehr, je größer n wird, womit die Reihen n. 1. u. 2. des vorhergehenden §. übereinstimmen, weil diejenigen Glieder, welche die Quadrate und höhere Potenzen von Δx zu Factoren haben, desto kleiner werden, je kleiner Δx oder je größer n wird. In der Reihe n. 3. ist dasjenige Glied, welches Δx zum Factor hat, die halbe Summe der in und um die Figur beschriebenen Rechtecke, welches also den Inhalt eines in oder um die Figur beschriebenen Vielets ausdrükt, je nachdem die krumme Linie gegen die Axe der Abscissen hol oder erhaben ist.

§. 152. Sey z. B. $F'x = \frac{c}{x}$; so ist $Fx = C + c\,\mathrm{Lg.}\,x$, und wenn das Integral für $x = a$ verschwinden soll, $Fx = c\,\mathrm{Lg.}\,\frac{x}{a}$, mithin auch $F(x+z) - Fx = c\,\mathrm{Lg.}\,\frac{x+z}{x}$.

Will man nun die logarithmischen Tafeln nicht als construirt voraussetzen; so kann man dieses Integral auf folgende Art näherungsweise finden. Es ist in diesem Fall

$\frac{d.F'x}{dx}$ oder $F''x = -\frac{c}{x^2}$; folglich

$$F'''x = \frac{2c}{x^3},$$

$$F^{IV}x = -\frac{2.3.c}{x^4}, \text{ u. s. w.}$$

Also ist, wenn man z in n gleiche Theile, wovon jeder $= k$ sey, eintheilt, nach der Formel n. 1. §. 150.

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{c}(F(x+z)-Fx)\\ \text{Lg.}\ \frac{x+z}{x}\end{matrix}\right\} = k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+k}+\cdots+\frac{1}{x+(n-1)k}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}k^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+k)^2}+\cdots+\frac{1}{(x+(n-1)k)^2}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}k^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x+k)^3}+\cdots+\frac{1}{(x+(n-1)k)^3}\right)-\&c.$$

Nach der Formel n. 2. ist

$$\text{Lg.}\ \frac{x+z}{x} = k\left(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x+2k}+\cdots+\frac{1}{x+nk}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}k^2\left(\frac{1}{(x+k)^2}+\frac{1}{(x+2k)^2}+\cdots+\frac{1}{(x+nk)^2}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}k^3\left(\frac{1}{(x+k)^3}+\frac{1}{(x+2k)^3}+\cdots+\frac{1}{(x+nk)^3}\right)$$
$$+\ \&c.$$

Nimmt man die halbe Summe dieser zwey Reihen, oder gebraucht man die Formel n. 3.; so findet man

$$\text{Lg.}\left(\frac{x+z}{x}\right) = k\left(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x+2k}+\cdots+\frac{1}{x+(n-1)k}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}k\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+nk}\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}k^2\left(\frac{1}{(x+(n-1)k)^2}-\frac{1}{(x+nk)^2}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}k^3\left(\frac{1}{(x+k)^2}+\frac{1}{(x+2k)^2}+\frac{1}{(x+(n-1)k)^2}\right)$$
$$+\tfrac{1}{6}k^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x+nk)^3}\right)$$
$$-\ \&c.$$

Für $x=z=1$ wird, wenn man $n=3$, mithin $k=\frac{1}{3}$ macht, nach der ersten dieser Reihen

$$\text{Lg. } 2 = \tfrac{1}{3}\left(1+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{5}\right)-\tfrac{1}{2.9}\left(1+\tfrac{9}{16}+\tfrac{9}{25}\right)+\&c.$$
$$=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{125}\right)-\&c.$$

Mittelst der zweyten Reihe erhält man

$$\text{Lg. } 2 = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{5}+\tfrac{3}{6}\right)+\tfrac{1}{2.9}\left(\tfrac{9}{16}+\tfrac{9}{25}+\tfrac{9}{36}\right)+\&c.$$

$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{125} + \tfrac{1}{216}\right) + \text{&c.}$$

§. 153. Um das Integral von $\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$ zu finden, könnte man die Exponentialgröße nach §. 29. n. 5. in eine Reihe entwickeln, welche aber nur für große Werthe von x geschwind convergiren würde. Für kleine Werthe von x kann man dieses Integral nach dem 150sten §. so finden.

Es ist $d.e^{-\frac{1}{x}}x = \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x} + e^{-\frac{1}{x}}dx$, und daher

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x} = e^{-\frac{1}{x}}x - \int e^{-\frac{1}{x}}dx.$$ Man setze $Fx = e^{-\frac{1}{x}}$; so sind

$$F'x = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}, F''x = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right), F'''x = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right),$$

u. s. w.

Also wird nach §. 150. n. 1. für $z = nk$,

$$F(x+z) - Fx = k\left(e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x+k}} + \ldots + e^{-\frac{1}{x+(n-1)k}}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} + \frac{e^{-\frac{1}{x+k}}}{(x+k)^2} + \ldots + \frac{e^{-\frac{1}{x+(n-1)k}}}{(x+(n-1)k)^2}\right) + \text{&c.}$$

Nun ist, wenn man $\frac{1}{x} = v$ setzt, $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^m} = \frac{v^m}{e^v}$; mithin, wenn man die Exponentialgröße nach §. 29. n. 5. in eine Reihe entwickelt, und Zähler und Nenner mit v^m dividirt,

$$\frac{v^m}{e^v} = \frac{1}{v^{-m} + v^{-m+1} + \frac{1}{2}v^{-m+2} + \ldots \frac{1}{2.3\ldots m} + \frac{v}{2.3\ldots m(m+1)} + \ldots}$$

welcher Bruch durch die Vergrößerung von v oder durch die Verminderung von x kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Größe. Folglich verschwinden die Functionen $F'x$, $F''x$, $F'''x$, u. s. w- mit x zugleich, und es ist, wenn man $x = 0$ sezt,

$$\left.\begin{matrix} Fz \\ \text{oder } \int e^{-\frac{1}{z}} dz \end{matrix}\right\} = k\left(e^{-\frac{1}{k}} + e^{-\frac{1}{2k}} + \ldots + e^{-\frac{1}{(n-1)k}}\right)$$

$$+ \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{e^{-\frac{1}{k}}}{k^2} + \frac{e^{-\frac{1}{2k}}}{2^2.k^2} + \ldots + \frac{e^{-\frac{1}{(n-1)k}}}{(n-1)^2k^2}\right)$$

$$+ \frac{k^3}{1.2.3}\left(e^{-\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k^4} - \frac{2}{k^3}\right) + \ldots + e^{-\frac{1}{(n-1)k}}\left(\frac{1}{(n-1)^4k^4} - \frac{2}{(n-1)^3k^3}\right)\right)$$

+ &c. so genommen, daß das Integral für $z = 0$ verschwindet.

Macht man $nk = x$; so erhält man das Integral von $e^{-\frac{1}{x}} dx$ wiederum so genommen, daß es für $x = 0$ verschwindet. Der Ueberschuß der Function $e^{-\frac{1}{x}} x$, welche ebenfalls mit x zugleich verschwindet, über das $\int e^{-\frac{1}{x}} dx$ ist alsdenn das Integral von $\frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x}$.

Sezt man $nk = 1$, mithin $k = \frac{1}{n}$; so erhält man

$$\int e^{-\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{n}\left(e^{-n} + e^{-\frac{n}{2}} + \ldots + e^{-\frac{n}{n-1}}\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left(e^{-n} + \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2^2} + \ldots + \frac{e^{-\frac{n}{n-1}}}{(n-1)^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(e^{-n}(n-2) + \ldots + e^{-\frac{1}{(n-1)k}}\left(\frac{u}{(n-1)^4} - \frac{2}{(n-1)^3}\right)\right)$$

von $x = 0$ an bis $x = 1$. Die Exponentialgrößen sind durch die logarithmischen Tafeln gegeben, weil $e^{-v} = \frac{1}{e^v} =$ der

Einheit dividirt durch die Zahl, deren natürlicher Logarithme $= v$ ist.

Von der Integration der höheren Differentiale.

§. 154. Sey $\frac{d^2y}{dx^2} =$ einer Function X von x; so ist

$$d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = Xdx,$$

$\frac{dy}{dx} = \int Xdx$, und, wenn man $\int Xdx = P +$ Const. sezt,

$$dy = Pdx + Cdx,$$
$$y = \int Pdx + Cx + C',$$

oder $y = \int dx \int Xdx + Cx + C'$.

Weil $d.P.x = Pdx + xdP$; so ist $\int Pdx = Px - \int xdP$, und daher,

$$y = x\int Xdx - \int Xxdx + Cx + C'.$$

Sey $\frac{d^3y}{dx^3} = X$; so ist

$$d.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = Xdx,$$

und $\frac{d^2y}{dx^2} = \int Xdx + C.$

Also ist ferner $\frac{dy}{dx} = \int dx \int Xdx + Cx + C'$,

$= x\int Xdx - \int Xxdx + Cx + C'$, nach dem vorhergehenden.

Hieraus erhält man

$$y = \int xdx \int Xdx - \int dx \int Xdx + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C'x + C''.$$

Es ist aber $d.x^{m+1} P = (m+1)x^m dx.P + x^{m+1}dP$,

$$\int x^m dx.P = \frac{x^{m+1}}{m+1} P - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}dP;$$

folglich $\int x^m dx \int Xdx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\int Xdx - \frac{1}{m+1}\int Xx^{m+1}dx,$

und daher $y = \frac{1}{2}x^2 \int Xdx - x\int Xxdx + \frac{1}{2}\int Xx^2 dx$

$$+ \tfrac{1}{2}Cx^2 + C'x + C'', \text{ wenn } \frac{d^3y}{dx^3} = X.$$

Diese auf einander folgende Integrationen bezeichnet

man auf folgende Art. Statt $\int Pdx = \int dx \int Xdx$ schreibt man $\iint Xdx^2$ oder $\int^2 Xdx^2$, statt $\int dx \int dx \int Xdx$ schreibt man $\int^3 Xdx^3$ u. s. w. Nach dieser Bezeichnung ist also

$$\int^2 Xdx^2 = x\int Xdx - \int Xxdx + Cx + C',$$
$$\int^3 Xdx^3 = \tfrac{1}{2}(x^2 \int Xdx - 2x \int Xxdx + \int Xx^2 dx) + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C'x + C'',$$
$$\int^4 Xdx^4 = \tfrac{1}{2.3}(x^3 \int Xdx - 3x^2 \int Xxdx + 3x \int Xx^2 dx - \int Xx^3 dx + \tfrac{1}{2.3} Cx^3 + \tfrac{1}{2} C'x^2 + C''x + C''',$$

u. s. w.

wo $C, C', C'' \ldots$ die bey den Integrationen von Xdx. $Xxdx$, $Xx^2dx \ldots$ hinzugefügten Constanten bezeichnen.

Diese Reihen geben übrigens die Integrale selten in ihrer einfachsten Form.

Es ist z. B. $\int^3 x^m dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$ (§. 16.).

Nach obigen Formeln aber wird $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$,

$\int x^m x dx = \frac{x^{m+2}}{m+2}$, $\int x^m x^2 dx = \frac{x^{m+3}}{m+3}$, und daher mit Weglassung der Constanten $\int^3 x^m dx = \frac{x^{m+3}}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{2}{m+2} + \frac{1}{m+3}\right)$.

Nach gehöriger Reduction findet man dieses Integral $= \frac{x^{m+3}}{2} \cdot \frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)} = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$, wie es seyn muß.

Sechstes Capitel.

Von der Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit zwey veränderlichen Größen

§. 155. Die Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit den zwey veränderlichen Größen x und y haben die

allgemeine Form $Pdx + Qdy = 0$ (§. 42.). Wenn nun P nur die veränderliche Größe x, und Q nur die veränderliche Größe y enthält, oder P eine Function X von x allein, und Q eine Function Y von y allein ist; so hat man

$$Xdx + Ydy = 0, \text{ und}$$
$$\int Xdx + \int Ydy = \text{Const.}$$

Sey z. B. $x^m dx + y^n dy = 0$; so ist (§. 105. u. 106.) $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} = C$ die gesuchte Gleichung zwischen den zwey veränderlichen Größen x und y, oder die Integralgleichung.

Wäre die gegebene Differentialgleichung folgende

$$Ydx + Xdy = 0;$$

so würde durch die Division mit XY die Gleichung sich in diese verwandeln

$$\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0,$$

und man würde haben $\int \frac{dx}{X} + \int \frac{dy}{Y} = C$.

Sey z. B. $ydx - xdy = 0$; so hat man

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0, \text{ und daher}$$

Lg. x - Lg y = Lg. C, weil der Logarithme einer constanten Größe ebenfalls die willkührliche Constante bezeichnen kann. Es ist also

$$\text{Lg. } \frac{x}{y} = \text{Lg. } C, \text{ und } \frac{x}{y} = C.$$

Wenn man also eine Differentialgleichung von der Form $Pdx + Qdy = 0$, in welcher P und Q die zwey veränderlichen Größen x und y zugleich enthalten auf die Form $Xdx + Ydx = 0$ bringen kann, in welcher X eine Function von x allein, Y eine Funttion von y allein ist, welche Umwandlung man die Absonderung der veränderlichen Größen nennt; so reducirt sich die Integration derselben auf die Integrationen von Xdx und Ydy, welche bisher gezeigt worden sind. Diese Absonderung der veränderlichen

Größen kann ebenfalls leicht bewerkstelligt werden, wenn die Differentialgleichung von der Form

$Xf'dx \pm X'fdy = 0$ ist,

und X, X' Functionen von x allein, f, f' Functionen von y allein sind. Denn man erhält, wenn man beyderseits mit $X'.f'$ dividirt, die Gleichung

$$\frac{X}{X'}dx \pm \frac{f}{f'}dy = 0.$$

§. 156. Wenn in der Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ die Functionen P und Q homogene Functionen von x und y, oder so beschaffen sind, daß die Summe der Exponenten der Potenzen der veränderlichen Größen x und y in jedem Glied dieselbe ist; so kann die Absonderung der veränderlichen Größen durch die Substitution von xz statt y bewerkstelligt werden. Denn es sey irgend ein Glied von P oder $Q = ax^m y^n$; so wird, wenn man xz statt y sezt, dieses Glied sich in $ax^m.x^n z^n$ oder in $ax^{m+n}z^n$ verwandeln, und ebenso wird aus $bx^p y^q$ werden $bx^{p+q}z^q$ oder $bx^{m+n}z^q$, weil $m+n = p+q$ (Voraussf.). Also werden P und Q nach dieser Substitution mit x^{m+n} theilbar, und $\frac{P}{Q}$ wird eine Function Z von z allein, wenn man Zähler und Nenner mit x^{m+n} dividirt. Weil nun $y = xz$; so ist $dy = xdz + zdx$.

Aber $dy + \frac{P}{Q}dx = 0$;

folglich $xdz + zdx + \frac{P}{Q}dx = 0$, oder, weil $\frac{P}{Q} = Z$

$$xdz + (Z+z)dx = 0,$$

$$\frac{dz}{Z+z} + \frac{dx}{x} = 0,$$

und $\text{Lg. } x + \int \frac{dz}{Z+z} = C.$

Sey z. B. $(ax+by)dx + (a'x+b'y)dy = 0$. Man sezze $y = xz$; so wird

$$\frac{ax+by}{a'x+b'y} = \frac{ax+bxz}{a'x+b'xz} = \frac{a+bz}{a'+b'z} = Z, \text{ und } Z+z = \frac{(a+(a'+b)z+b'z^2}{a'+b'z};$$

folglich Lg. $x + \int \frac{(a' + b'z)\,dz}{a + (a' + b)z + b'z^2} = C$, wo man nach §. 112. integriren kann. Sezt man hernach $\frac{y}{x}$ statt z; so erhält man die gesuchte Integralgleichung zwischen x und y.

Sey $xdy = ydx + dx\sqrt{x^2 + y^2}$. Da die Quadrate von x und y unter dem Wurzelzeichen vorkommen; so ist diese Differentialgleichung homogen, denn man könnte statt xdy und ydx seßen $dy\sqrt{x^2}$ und $dx\sqrt{y^2}$. Man seße also $y = xz$; so erhält man

$xdy = xzdx + dx\sqrt{x^2 + x^2z^2}$, und, wenn man mit x dividirt,

$$\left.\begin{matrix} dy \\ \text{oder } xdz + zdx \end{matrix}\right\} = zdx + dx\sqrt{1 + z^2},$$

$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}$. Nach §. 123. findet man jezt

Lg. $(z + \sqrt{1 + z^2}) =$ Lg. $\frac{x}{c}$, wo c die willkührliche Constante ist.

Demnach ist $z + \sqrt{1 + z^2} = \frac{x}{c}$,

$$1 + z^2 = \left(\frac{x}{c} - z\right)^2,$$

$$1 + z^2 = \frac{x^2}{c^2} - \frac{2xz}{c} + z^2,$$

$$1 = \frac{x^2}{c^2} - \frac{2y}{c}, \text{ weil } xz = y,$$

$$c^2 + 2cy = x^2.$$

§. 157. Sey $(a + mx + ny)\,dx + (b + px + qy)\,dy = 0$. Man seße

$x = t + \alpha$, und $y = u + \beta$; so werden $dx = dt$, $dy = du$, und die Gleichung verwandelt sich in folgende:

$(a + m\alpha + n\beta + mt + nu)\,dt + (b + p\alpha + q\beta + pt + qu)\,du = 0$;

mithin wird sie $(mt + nu)\,dt + (pt + qu)\,du = 0$, wenn

$a + m\alpha + n\beta = 0$,

$b + p\alpha + q\beta = 0$,

d. i. wenn $\alpha = \frac{aq-bn}{np-mq}$, und $\beta = \frac{bm-ap}{np-mq}$. Folglich kann man, wenn np nicht $= mq$ ist, die Größen α und β so bestimmen, daß durch die Substitution von $t+\alpha$ statt x und $u+\beta$ statt y obige Differentialgleichung homogen wird, und sie daher nach dem vorhergehenden §. integrirt werden kann.

Ist aber $np = mq$; so ist $npy = mqy$, und $mpx + npy = mpx + mqy$, oder $p(mx+ny) = m(px+qy)$, und die vorgegebene Gleichung verwandelt sich in folgende

$$adx + bdy + (mx+ny)(dx + \frac{p}{m}dy) = 0,$$

und, wenn man $mx+ny = z$ sezt, in

$$dx + \frac{(bm+pz)\,dz}{mna - bm^2 + (mn-pm)z} = 0,$$

in welcher die veränderlichen Größen von einander abgesondert sind. Für den Fall $n = p$ wird $mn - pm = 0$,

und daher $dx + \frac{(bm-pz)\,dz}{mna-bm^2} = 0$,

$$x + \frac{2bmz - pz^2}{2(mna-bm^2)} = C,$$

$$2m(na-mb)x + 2bm(mx+ny) - p(mx+ny)^2 = 2mC(na-mb),$$

oder $2mn(ax+by) - p(mx+ny)^2 = 2mC(na-mb)$.

§. 158. Sey $dy + Pydx = Qdx$, und P, Q seyen Functionen von x allein.

Man setze $y = Xz$, wo X eine noch zu bestimmende Function von x bezeichnet; so wird $dy = Xdz + zd.X$, und die Gleichung verwandelt sich in

$$Xdz + zd.X + PXzdx = Qdx.$$

Die Function X sey so beschaffen, daß $Xdz + PXzdx = 0$; so wird

$$zd.X = Qdx.$$

Weil nun $Xdz + PXzdx = 0$ (Voraussf.); so muß seyn

$$\frac{dz}{z} + Pdx = 0, \text{ und daher } \mathrm{Lg}.z + \int Pdx = 0, \mathrm{Lg}.z = -\int Pdx,$$

$$z = e^{-\int Pdx}.$$

Daher $d.X = \frac{Qdx}{z} = e^{\int Pdx} Qdx$. Man setze $\int Pdx = w$; so wird

$$X = \int e^{w} Q dx + C,$$

$$\left.\begin{matrix} \text{und } Xz \\ \text{oder } y \end{matrix}\right\} = e^{-w} (\int e^{w} Q dx + C).$$

Die Differentialgleichung $dy + Pydx = Qy^{n+1}dx$, wo wiederum P und Q Functionen von x allein sind, läßt sich auf die Form der hier betrachteten bringen, wenn man $y^n z = 1$ setzt. Alsdenn ist $ny^{n-1}zdy + y^n dz = 0$, und $dy = -\frac{ydz}{nz}$. Folglich verwandelt sich die vorgegebene Gleichung in diese

$$-\frac{ydz}{nz} + Pydx = Qy^{n+1}dx,$$

$$-dz + nPzdx = nQdx, \text{ weil } y^n z = 1,$$

oder $dz - nPzdx = -nQdx$, welche mit der oben betrachteten einerley Form hat.

Sey $y^m dy + Py^{m+1}dx = Qdx$. Man setze $z = y^{m+1}$; so wird $dz = (m+1)y^m dy$, und die Differentialgleichung wird $dz + (m+1)Pzdx = (m+1)Qdx$, welche wiederum mit der obigen einerley Form hat.

§. 159. Die Differentialgleichung $dy + by^2 dx = ax^m dx$ heißt Riccati's Differentialgleichung, weil Riccati sich zuerst mit der Integration derselbigen beschäftigt hat *). Für gewiße Werthe des Exponenten m lassen sich die veränderlichen Größen von einander absondern. Für $m = 0$ hat man $dy + by^2 dx = adx$, $dy = (a - by^2)dx$, und daher

$$dx = \frac{dy}{a - by^2},$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \text{Lg.} \frac{\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}} + C.$$

Um die Gleichung homogen zu machen, setze man $y = z^n$. Alsdenn wird $dy = nz^{n-1}dz$, und die Gleichung verwandelt sich in

*) Acta Eruditorum. 1722. T. VIII. supplem. pag. 66.

$nz^{n-1}dz + bz^{2n}dx = ax^m dx$, welche homogen wird, wenn $n-1 = 2n = m$, welches $n = -1$ und $m = -2$ giebt. Die Gleichung $dy + by^2 dx = \frac{adx}{x^2}$ kann also homogen gemacht und nach §. 150. integrirt werden, wenn man $y = \frac{1}{z}$ sezt, wodurch man erhält

$$1.) \; -\frac{dz}{z^2} + \frac{bdx}{z^2} = \frac{adx}{x^2}.$$

Durch dieselbe Substitution verwandelt sich die allgemeine Gleichung in

$$-\frac{dz}{z^2} + \frac{bdx}{z^2} = ax^m dx,$$

oder $-dz + bdx = az^2 x^m dx$.

Man sezze $x^m dx = kdt$, oder $x^{m+1} = (m+1)kt$; so wird, wenn man $k = \frac{1}{m+1}$ sezt, $x^{m+1} = t$, $x^m = t^{\frac{m}{m+1}}$, und die Gleichung verwandelt sich in diese

$$-dz + \frac{b}{m+1} t^{-\frac{m}{m+1}} dt = \frac{az^2 dt}{m+1},$$

$$\text{oder } 2.) \; dz + \frac{a}{m+1} z^2 dt = \frac{b}{m+1} t^{-\frac{m}{m+1}} dt,$$

welche mit der Gleichung $dy + by^2 dx = ax^m dx$ einerley Form hat, so daß, wenn in einer dieser zwey Gleichungen die veränderlichen Größen von einander abgesondert werden können, es in der anderen auch geschehen kann. Für $m = -2$, wo diese Absonderung bewerkstelligt werden kann, wird $\frac{m}{m+1} = 2$, und man kommt wieder auf die vorige Gleichung, wodurch nichts gewonnen ist. Sezt man aber allgemeiner

$y = Ax^p + x^q z$; so findet man

$dy = (pAx^{p-1} + qzx^{q-1})dx + x^q dz$,

und $y^2 dx = (A^2 x^{2p} + 2Ax^{p+q} z + x^{2q} z^2)dx$.

Man substituire diese Ausdrücke in der Gleichung $dy + by^2 dx = ax^m dx$; so erhält man

$x^q dz + (qx^{q-1} + 2Abx^{p+q} + bx^{2q} z)zdx$

$+ (pAx^{p-1} + A^2 bx^{2p})dx = ax^m dx$, welche Gleichung sich

wie die vorgegebene auf drey Glieder reducirt, wenn $p-1 = 2p$, $pA+A^2b=0$, $q-1=p+q$, und $q+2Ab=0$ sind. Vermöge der ersten dieser Gleichungen muß also seyn $p=-1$, womit die dritte übereinstimmt. Für diesen Werth von p werden $A=\frac{1}{b}$, und $q=-2$; mithin $y=\frac{1}{bx}+\frac{z}{x^2}$, und

$$\frac{dz}{x^2}+\frac{b}{x^4}z^2dx=ax^mdx,$$

oder 3.) $$dz+bz^2\frac{dx}{x^2}=ax^{m+2}dx$$
$$=ax^{m+4}.\frac{dx}{x^2}.$$

Die Gleichung $dy+by^2dx=ax^mdx$ verwandelt sich also für $m=-4$ durch die Substitution von $\frac{1}{bx}+\frac{z}{x^2}$ statt y in diese

$$dz+bz^2\frac{dx}{x^2}=a\frac{dx}{x^2},$$ aus welcher man erhält

$$-\frac{dx}{x^2}=\frac{bdz}{bz^2-a}$$
$$\frac{1}{x}=\int\frac{bdz}{bz^2-a}.$$

Da nun die vorgegebene Gleichung integrabel ist für $m=-4$; so können vermöge n. 2. die veränderlichen Grösen auch alsdenn von einander abgesondert werden, wenn $\frac{m}{m+1}=4$, oder $m=-\frac{4}{3}$ ist.

In der Gleichung n. 3. setze man $x=\frac{1}{t}$; so wird

4.) $dz-bz^2dt=-at^{-m-4}dt$, welche Gleichung mit der vorgegebenen $dy+by^2dx=ax^mdx$ einerley Form hat, so daß, wenn in einer dieser zwey Gleichungen die veränderlichen Größen von einander abgesondert werden können, es bey der anderen auch möglich ist. Diß ist aber, wie man so eben gesehen hat, möglich für $m=-\frac{4}{3}$; folglich auch nach n. 4. für $m=+\frac{4}{3}-4=-\frac{8}{3}$, mithin nach n. 2. für $\frac{m}{m+1}=\frac{8}{3}$, oder $m=-\frac{8}{5}$. Also ferner nach n. 4. für $m=\frac{8}{5}-4=-\frac{12}{5}$ u. s. w., und allgemein für $m=-\frac{4k}{2k\pm1}$, wo k irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet.

Wenn der Exponent m unter dieser allgemeinen Form begriffen ist; so kommt man durch die abwechslungsweise vorzunehmende Substitutionen n. 2 und 4. zulezt auf eine Differentialgleichung von der Form $dy + by^2 dx = adx$. Demnach können in der Riccatischen Gleichung die veränderlichen Größen von einander abgesondert werden, wenn $m = 0$, $m = -2$, oder von der Form $-\frac{4k}{2k \pm 1}$ ist. Man würde durch schikliche Substitutionen dieses noch in mehreren besonderen Fällen bewerkstelligen können.

§. 160. Eine andere Methode die Differentialgleichungen zu integriren lauft darauf hinaus, daß man die eine Seite derselben durch die Multiplication mit einer Function der veränderlichen Größen integrabel zu machen sucht. Um dieses Verfahren durch einige Beyspiele zu erläutern, sey

1.) $ydx + nxdy = Ydy$, und Y eine Function von y allein. Man multiplicire diese Gleichung mit y^{n-1}; so erhält man

$$y^n dx + nxy^{n-1} dy = Yy^{n-1} dy.$$

Die erste Seite dieser Gleichung ist jezt das Differential von xy^n (§. 36.), und daher $xy^n = C + \int Yy^{n-1} dy$. Da nun Y eine Function von y allein ist; so ist die Integration der vorgegebenen Differentialgleichung auf die Integration einer Function von einer veränderlichen Größe zurükgeführt.

Sey 2.) $xdy + mydx = Xdx$, und X eine Function von x allein. Durch die Multiplication mit x^{m-1} erhält man

$$\left.\begin{array}{l} x^m dy + myx^{m-1} dx \\ \text{oder } d.\, x^m y \end{array}\right\} = Xx^{m-1} dx, \text{ und daher}$$

$$x^m y = C + \int Xx^{m-1} dx.$$

Sey 3.) $ydx - xdy = Ydy$. Man multiplicire die Gleichung mit $\frac{1}{y^2}$; so wird

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ydx - xdy}{y^2} \\ \text{oder (§. 38.) } d.\, \frac{x}{y} \end{array}\right\} = \frac{Ydy}{y^2};$$

folglich $\frac{x}{y} = C + \int \frac{Ydy}{y^2}$.

Sey 4.) $ydx - xdy = Xdx$. Man multiplicire beyderseits mit $\frac{1}{x^2}$; so wird

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = \frac{Xdx}{x^2},$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = -\frac{Xdx}{x^2},$$

und daher $\frac{y}{x} = C - \int \frac{Xdx}{x^2}$.

Sey 5.) $mydx + nxdy = 0$; so wird, wenn man beyderseits mit $x^{m-1}.y^{n-1}$ multiplicirt,

$$my^n x^{m-1}dx + nx^m y^{n-1}dy = 0,$$

$$\text{oder } d.y^n.x^m = 0;$$

$$\text{folglich } y^n.x^m = C.$$

§. 161. Die Untersuchung, ob eine vorgegebene Differentialgleichung für sich integrabel sey, oder erst durch die Multiplication mit einer Function der veränderlichen Grösen zu der Integration vorbereitet werden müße, kann auf folgende Art angestellt werden. Es sey $Z = F(x, y)$ eine Function der veränderlichen Größen x und y; so ist, wenn ΔZ die Aenderung bezeichnet, welche diese Function leidet, wenn x um Δx und zugleich y um Δy sich ändert, und zuerst x und y als von einander independent betrachtet werden, nach §. 45.

$$\Delta Z = \frac{\Delta x}{1}\frac{d.F(x,y)}{dx} + \frac{\Delta y}{1}\frac{d.F(x,y)}{dy}$$

$$+\frac{1}{1.2}\left(\overline{\Delta x}^2\frac{d^2.F(x,y)}{dx^2} + 2\Delta x.\Delta y\frac{d^2.F(x,y)}{dx\,dy} + \overline{\Delta x}^2\frac{d^2.F(x,y)}{dy^2}\right)$$

$$+ \&c.$$

Die Function Z sey jezt so beschaffen, daß sich ihre Glieder beständig gegen einander aufheben; so wird man die Gleichung haben $F(x, y) = 0$, vermöge welcher die zwey veränderlichen Größen nicht zugleich willkührlich sind, sondern für jeden Werth der einen die andere so bestimmt werden muß, daß $F(x, y)$ oder $Z = 0$ wird. Dadurch werden x und y Functionen von einander, und weil Z beständig

$=0$ seyn soll; so wird man auch haben $\Delta Z=0$, und, wenn man zur Abkürzung $\frac{d.F(x,y)}{dx}=P$, $\frac{d.F(x,y)}{dy}=Q$ sezt,

$$0=P\Delta x+Q\Delta y$$
$$+\frac{1}{1.2}\left(\overline{\Delta x}^2\cdot\frac{dP}{dx}+2\Delta x\,\Delta y\,\frac{dQ}{dx}+\overline{\Delta y}^2\,\frac{dQ}{dy}\right)$$
$$+\text{ \&c.}$$

Demnach ist $Pdx+Qdy=0$ die durch das Differentiiren der auf Null reducirten Gleichung Z oder $F(x,y)=0$ erhaltene Differentialgleichung (§. 42.). Es muß aber, wenn x und y zugleich sich verändern, die Veränderungen Δx und Δy mögen übrigens beschaffen seyn wie sie wollen, $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$ seyn (§. 44.); folglich muß diese Gleichung auch alsdenn statt haben, wenn Δx und Δy die zusammengehörigen Veränderungen zweyer veränderlichen Größen x und y sind, welche so von einander abhängen, daß beständig $F(x,y)=0$ ist. Wenn also $Pdx+Qdy=0$ für sich integrabel seyn soll; so muß $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$ seyn.

Sey $P=M-X$, und M bleibe eine Function von x und y zugleich, X aber sey eine Function von x allein; so kann man die Gleichung $Pdx+Qdy=0$ in folgende verwandeln $(M-X)dx+Qdy=0$,

oder $Mdx+Qdy=Xdx$. Es sey $\frac{d.M}{dy}=\frac{d.Q}{dx}$, so ist auch, weil X kein y enthält, $\frac{d.(M-X)}{dy}=\frac{d.Q}{dx}$, und daher die Gleichung $(M-X)dx+Qdy=0$ für sich integrabel. Weil nun X eine Function von x allein ist; so muß auch der übrige Theil $Mdx+Qdy$ dieser Gleichung für sich integrabel seyn. Ebenso ist, wenn

$$Pdx+Ndy=Ydy,$$

und $\frac{dQ}{dx}=\frac{dN}{dy}$ ist, die Seite $Pdx+Ndy$ dieser Gleichung für sich integrabel.

In Beziehung auf das Beyspiel n. 2. des vorhergehenden §. ist, wenn man die unveränderte Differentialgleichung

chung beybehält, $Q = x$, $P = my$, $\frac{dQ}{dx} = 1$, $\frac{dP}{dy} = m$, und daher die erste Seite dieser Gleichung nicht für sich integrabel. Nach der Multiplication mit x^{m-1} ist aber $Q = x^m$, $P = myx^{m-1}$, $\frac{dQ}{dx} = mx^{m-1}$, $\frac{dP}{dy} = mx^{m-1}$; folglich $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$, und die erste Seite dieser Gleichung kann nach dieser Vorbereitung integrirt werden.

§. 162. Wenn $du = Pdx + Qdy$, und $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, mithin die zweyte Seite dieser Gleichung für sich integrabel ist; so kann die Integralgleichung so gefunden werden. Man integrire zuerst in Beziehung auf eine der veränderlichen Grössen, z. B. in Beziehung auf x, indem man die andere y als constant betrachtet; so wird man, weil unter dieser Voraussetzung $dy = 0$ ist, haben

$u = \int Pdx + \text{Const.}$

Es ist aber P eine Function von x und y zugleich; folglich wird, wenn $P = f(x, y)$ gesezt wird, und für $x = a$ dieses Integral von Pdx einen gewißen bestimmten Werth b bekommen soll, seyn müßen $b = f(a, y) + C$, mithin $C = b - f(a, y)$, das ist $C =$ einer Function von y. Man bezeichne diese mit Y; so wird, nachdem man blos in Beziehung auf x integrirt hat,

$u = \int Pdx + Y$, oder, wenn man $\int Pdx = v$ sezt,

$u = v + Y$.

Aber diese Function u muß der Gleichung $\frac{du}{dy} = Q$ Genüge leisten, weil Qdy das Differential von u in Beziehung auf y ist (Voraussf.); folglich wird seyn müßen

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{dY}{dy} = Q,$$

woraus man erhält $\frac{dY}{dy} = Q - \frac{dv}{dy}$,

und $Y = \int (Q - \frac{dv}{dy})\, dy$.

Dadurch ist nun Y bestimmt, so daß man haben wird

$$u = \int P dx + \int (Q - \frac{dv}{dy})\, dy,$$

$$= \int P dx + \int (Q - \frac{d.\int P dx}{dy})\, dy.$$

1. Zusaz. Wenn P eine Function $f(x, y)$ der zwey veränderlichen Größen x und y, und $v = \int P dx$ in Beziehung auf x allein genommen; so ist $\frac{d.\int P dx}{dy} = \int (\frac{dP}{dy})\, dx$, das ist, man erhält einerley Resultat, man mag zuerst in Beziehung auf x die Differentialformel Pdx integriren, und sie hierauf in Beziehung auf y differentiiren, oder die Function P zuerst in Beziehung auf y differentiiren, und sie hernach in Beziehung auf x integriren, wenn man nur bey jeder dieser Operationen die andere veränderliche Größe als constant betrachtet. Denn es ist

$$v + \Delta v = \int dx f(x, y + \Delta y)$$

$$= \int dx \left(f(x, y) + \frac{\Delta y}{1} \frac{d.f(x,y)}{dy} + \frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2} \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2} + \&c.\right)$$

$$= \int dx f(x,y) + \frac{\Delta y}{1} \int \frac{d.f(x,y)}{dy} dx + \frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2} \int \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2} dx + \&c.$$

weil bey dieser Integration y als constant, und x allein als veränderlich betrachtet wird, und man daher nach §. 106. integriren kann. Folglich ist, wenn man zur Abkürzung wiederum P statt $f(x,y)$ sezt,

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = \int \frac{dP}{dy} dx + \frac{\Delta y}{1.2} \int \frac{d^2 P}{dy^2} dx + \&c.$$

und daher $\frac{dv}{dy} = \int \frac{dP}{dy} dx$, oder $\frac{d.\int P dx}{dy} = \int \frac{dP}{dy} dx$.

2. Zusaz. Weil $Y = \int (Q - \frac{d.\int P dx}{dy})\, dy$; so ist, wenn man in Beziehung auf y differentiirt, $\frac{dY}{dy} = Q - \frac{d.\int P dx}{dy}$

$= Q - \int \frac{dP}{dy} dx$ (Zus. 1.). Man differentiire noch einmal, aber in Beziehung auf x; so ist, weil y kein x enthält,

$o = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}$, welches wiederum die Bedingungsglei-

chung für die Integrabilität der in diesem §. betrachteten Differentialgleichung ist.

§. 163. Sey z. B. $y^n dx + nxy^{n-1} dy = du$; so ist $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Ferner ist $v = \int y^n dx = y^n x$,

$$\frac{dv}{dy} = ny^{n-1}x, \text{ und daher } Q - \frac{dv}{dy} = 0.$$

Folglich ist $y^n x = u + C$, übereinstimmend mit §. 160. n. 1., wenn man $\gamma y^{n-1} dy$ statt du sezt.

Sey $du = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2}$; so ist $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, und

$\left.\begin{matrix}\int Pdx \\ \text{oder } v\end{matrix}\right\} = \int \frac{ydx}{x^2+y^2}$, y als constant betrachtet,

$= Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{x}{y}$ (§. 122. n. 2. wenn man y statt a sezt).

Ferner ist $\frac{dv}{dy} = -\frac{\frac{xdy}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}$ (§. 34. n. 3.),

$$= -\frac{xdy}{x^2+y^2}, \text{ und daher } Q - \frac{dv}{dy} = 0;$$

$$\left.\begin{matrix}\text{folglich } u \\ \text{oder } \int \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}\end{matrix}\right\} = Arc.\,\text{Tg.}\,\frac{x}{y} + C.$$

Sey $(mx^{m-1}y^n + pax^{p-1})dx + (nx^m y^{n-1} + bqy^{q-1} + ry^{r-1})dy = 0$. Es ist

$\frac{dP}{dy} = mnx^{m-1}y^{n-1}$, und $\frac{dQ}{dx} = mnx^{m-1}y^{n-1}$; folglich kann man auch diese Differentialgleichung unmittelbar integriren. Man hat

$\int Pdx$ oder $v = x^m y^n + a\lambda^p$,

$$\frac{dv}{dy} = nx^m y^{n-1},$$

$$Q - \frac{dv}{dy} = bqy^{q-1} + ry^{r-1},$$

$\int (Q - \frac{dv}{dy})dy = by^q + y^r$; folglich ist die gesuchte Inte-

gralgleichung $x^m y^n + ax^p + by^q + y^r = \text{Const.}$

Es ist auch $\int \frac{dP}{dy} dx = \int mnx^{m-1}y^{n-1}dx = nx^m y^{n-1}$, y als constant betrachtet, und dieses Integral ist der oben gefundenen Function $\frac{dv}{dy}$ gleich, übereinstimmend mit dem ersten Zusaz des vorhergehenden §.

§. 164. Es sey nun $Mdx + Ndy = 0$ eine auf Null reducirte Differentialgleichung, und $\frac{dM}{dy}$ nicht $= \frac{dN}{dx}$; folglich diese Gleichung nicht unmittelbar integrabel (§. 161.). Der Factor, mit welchem die Glieder dieser Gleichung multiplicirt werden müßen, um sie integrabel zu machen, heiße R; so wird man nach der Multiplication mit R haben $RMdx + RNdy = 0$, und es wird jezt seyn müßen

$$\frac{d.RM}{dy} = \frac{d.RN}{dx} \text{ (§. 161.)},$$

d. i. $$\frac{MdR}{dy} + \frac{RdM}{dy} = \frac{NdR}{dx} + \frac{RdN}{dx},$$

oder 1.) $$M\frac{dR}{dy} - N\frac{dR}{dx} + R\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0.$$

Könnte man aus dieser Gleichung den Werth von R finden; so würde man jede Differentialgleichung der ersten Ordnung nach §. 162. integriren können. Gewöhnlich ist aber ihre Auflösung schwieriger, als die der vorgegebenen Gleichung. Es giebt aber besondere Fälle, in welchen man den integrirenden Factor R leichter finden kann. Dieser Factor darf nemlich in gewißen Fällen, wie man aus den Beyspielen des 160sten §. sieht, nur eine der veränderlichen Grösen x oder y enthalten. Wenn nun R kein y enthalten darf; so ist $\frac{dR}{dy} = 0$, und die Gleichung n. 1. verwandelt sich in folgende $-N\frac{dR}{dx} + R\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = 0$, aus welcher man erhält

2.) $$\frac{dR}{R} = \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx.$$

Da $\int \frac{dR}{R} = \text{Lg. } R$; so muß auch die andere Seite dieser Gleichung integrabel, und daher $\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) dx$ eine Function von x allein seyn. Diese Bedingung wird also zu einem Kennzeichen dienen, ob eine vorgegebene Differentialgleichung durch die Multiplication mit einer Function von einer der zwey veränderlichen Größen integrabel gemacht werden könne. Findet sich $\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) =$ einer Function fx von x allein; so hat man aus der Gleichung n. 2.

3.) $\text{Lg. } R = \int dx fx$, und daher $R = e^{\int dx fx}$.

Wenn z. B. $dy + Pydx = Qdx$, und P, Q Functionen von x allein sind; so ist $M = Py - Q$, und $N = 1$, mithin $\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = P =$ einer Function von x. Der integrirende Factor ist also vermöge n. 3. gleich $e^{\int Pdx}$. Man multiplicire die vorgegebene Gleichung mit diesem Factor; so kommt $e^{\int Pdx} dy + Pe^{\int Pdx} ydx = e^{\int Pdx} Qdx$, und man findet jezt nach §. 162. $ye^{\int Pdx} = \int e^{\int Pdx} Qdx + C$, übereinstimmend mit §. 158.

Wäre $\frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) =$ einer Function fy von y allein, so würde der integrirende Factor $R = e^{\int dy fy}$ seyn. Sey z. B. $ydx - xdy = 0$; so sind $M = y$, $N = -x$, $\frac{dM}{dy} = 1$; $\frac{dN}{dx} = -1$, und $\frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) = -\frac{2}{y}$, mithin $\int dy fy = -2 \text{ Lg. } y = \text{Lg. } \frac{1}{y^2}$. Es ist aber allgemein, wenn $e^{\text{Lg. } z} = w$ ist, $\text{Lg. } z = \text{Lg. } w$, und $z = w$; folglich ist hier der integrirende Factor $= \frac{1}{y^2}$.

Kennt man einen Werth von R, welcher eine vorgegebene Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ integrabel macht; so kann man unzählich viele andere finden, welche dieselbe Eigenschaft haben. Sey nemlich $RMdx + RNdy = dZ.$, wo

das Integral von dZ vermöge der Voraussetzung gefunden werden kann; so ist, wenn man beyderseits mit irgend einer Function FZ von Z multiplicirt, $R.FZ.Mdx + R.FZ.Ndy = FZ.dZ$, und die zweyte Seite dieser Gleichung für sich integrabel. Folglich ist es auch die erste, und der Factor $R.FZ$ hat dieselbe Eigenschaft wie der Factor R.

§. 165. Wenn in der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ die Functionen M und N homogene Functionen von x und y sind; so kann der integrirende Factor ebenfalls leicht gefunden werden. Sey m die Summe der Exponenten von x und y in jedem Glied der zwey Functionen M und N, oder, wenn es gebrochene Functionen sind, der Ueberschuß der Summe der Exponenten im Zähler über die im Nenner. Man setze $y = xz$; so werden $M = x^m.M'$, und $N = x^m.N'$, und M', N' solche Functionen, welche allein z enthalten. Da nun $dy = xdz + zdx$; so werden

$Mdx = x^m M' dx$,

$Ndy = x^m N'(xdz + zdx)$, und

$Mdx + Ndy = x^m(M' + N'z)\,dx + N'x^{m+1}dz$.

Es ist aber $Mx + Ny = x^{m+1}(M' + N'z)$;

folglich ist $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{x^m(M' + N'z)\,dx + N'x^{m+1}dz}{x^{m+1}(M' + N'z)}$,

$= \frac{dx}{x} + \frac{N'dz}{M' + N'z}$.

Die zweyte Seite dieser Gleichung ist, weil M' und N' die veränderliche Größe z allein enthalten, für sich integrabel; folglich ist es auch die erste, und daher der integrirende Factor $= \frac{1}{Mx + Ny}$.

Sey z. B. $mydx + nydy = 0$; so sind

$Mx = mxy$, $Ny = nxy$, $Mx + Ny = (m + n)\,xy$, und der integrirende Factor ist $\frac{1}{(m+n)\,xy}$ oder, mit Weglassung des constanten Factors, $= \frac{1}{xy}$.

Die Gleichung verwandelt sich durch die Multiplication mit $\frac{1}{xy}$ in folgende

$\frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y} = 0$, woraus man erhält

$m \text{Lg.} x + n \text{Lg.} y = \text{Lg.} C$, oder $x^m y^n = C$, übereinstimmend mit §. 160. n. 5. Man hat daselbst die Gleichung durch die Multiplication mit $x^{m-1} y^{n-1}$ integrabel gemacht. Dieser Factor ist auch $= \frac{1}{xy} . x^m y^n = \frac{1}{xy} . C$, weil $x^m y^n = C$, oder, weil man den constanten Factor C weglassen darf, $= \frac{1}{xy}$, wie man oben gefunden hat.

§. 166. Wir wollen jezt diejenige Differentialgleichungen der ersten Ordnung betrachten, in welchen Quadrate und höhere Potenzen der Differentiale vorkommen. Macht man diese Gleichungen, im Fall sie Wurzelgrößen enthalten, rational, so nehmen sie folgende allgemeine Form an,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + U = 0,$$

wo P, Q, u. s. w. im allgemeinen x und y enthalten. Es seyen p, p', p'' u. s. w. die Wurzeln dieser Gleichung, wenn man $\frac{dy}{dx}$ als die gesuchte Größe betrachtet; so wird man haben $\frac{dy}{dx} - p = 0$, $\frac{dy}{dx} - p' = 0$, $\frac{dy}{dx} - p'' = 0$, u. s. w. und p, p', p'' ... werden ebenfalls Functionen von x und y zugleich seyn. Jede dieser Gleichungen wird sich jezt nach den vorhergehenden Methoden behandeln lassen, und jede der ihnen entsprechenden Integralgleichungen so wohl, als das Product dieser Integralgleichungen wird der vorgegebenen Gleichung Genüge leisten.

Seyen nemlich $M = 0$, $M' = 0$, u. s. w. die Integralgleichungen von $\frac{dy}{dx} - p = 0$, $\frac{dy}{dx} - p' = 0$, u. s. w.; so wird man haben

$$\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \text{ oder } \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dM}{dx}}{\frac{dM}{dy}} = 0, \text{ und es wird}$$

seyn müßen

$\frac{\frac{dM}{dx}}{\frac{dM}{dy}} = -p$, mithin wird $\frac{dy}{dx} - p = 0$ seyn. Folglich wird der Werth von $\frac{dy}{dx} = p = -\frac{\frac{dM}{dx}}{\frac{dM}{dy}}$ der vorgegebenen Gleichung Genüge leisten, und ebenso wird es sich mit den aus den übrigen Integralgleichungen gefolgerten Werthen von $\frac{dy}{dx}$ verhalten.

Ferner wird man die Gleichung haben $M.M'.M''.M'''... = 0$, woraus man durch das Differentiiren erhält

$$(M'.M''.M'''...)\left(\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy}\frac{dy}{dx}\right)$$
$$+ (M.M''.M'''...)\left(\frac{dM'}{dx} + \frac{dM'}{dy}\frac{dy}{dx}\right)$$
$$+ \&c. = 0.$$

Sezt man nun in diese Gleichung den aus einer der Differentialgleichungen, z. B. aus der $M' = 0$ gefolgerten Werth von $\frac{dy}{dx}$; so werden, weil $M' = 0$, alle Glieder, welche den Factor M' enthalten, verschwinden, und man wird haben müßen

$$(M.M''.M'''...)\left(\frac{dM'}{dx} + \frac{dM'}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

oder $\frac{dM'}{dx} + \frac{dM'}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$, welches statt findet, wenn $M' = 0$ die Integralgleichung von $\frac{dy}{dx} - p = 0$ ist. Folglich entspricht die Gleichung $M.M'.M''... = 0$ ebenfalls der vorgegebenen Differentialgleichung. Die vollständige Integralgleichung aber ist das Product aller einzelnen Integralgleichungen.

Betrachtet man x und y als zusammengehörige Ordinaten einer krummen Linie; so ist jede der Gleichungen $M' = 0$, $M' = 0$, u. s. w. eine auf Null reducirte Gleichung für einen besonderen Zweig der krummen Linie, für

welche man die Gleichung $M.M'.M''... = 0$ hat, und wenn einige der Wurzeln p, p' u. s. w. imaginär sind; so zeigt diß die Unmöglichkeit der ihnen entsprechenden Zweige oder Punkte der krummen Linie an.

§. 167. Sey z. B. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$; so ist entweder

$\frac{dy}{dx} - a = 0$, oder $\frac{dy}{dx} + a = 0$, und daher

$y = ax + c$, oder $y = -ax + c'$.

Jede dieser Gleichungen gehört für eine gerade Linie, und das Product $(y - ax - c)(y + ax - c') = 0$ ist eine Gleichung für ein System zweyer geraden Linien, deren eine durch die Gleichung $y = ax + c$, die andere durch die Gleichung $y = -ax + c'$ bestimmt wird. Man differentiire das Product der zwey Gleichungen; so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx} - a\right)(y + ax - c') + \left(\frac{dy}{dx} + a\right)(y - ax - c) = 0.$$

Wird jezt der Gleichung $y = ax + c$ zu folge $\frac{dy}{dx} = a$, und $y - ax - c = 0$ gesezt; so wird die erhaltene Differentialgleichung so wohl, als die vorgegebene $= 0$.

Ebenso verhält es sich, wenn man $y = -ax + c'$, und $\frac{dy}{dx} = -a$ macht.

Sey $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ax = 0$; so hat man die zwey Gleichungen

$\frac{dy}{dx} + \sqrt{ax} = 0$, und $\frac{dy}{dx} - \sqrt{ax} = 0$, aus welchen man erhält

$y + \frac{2}{3}x\sqrt{ax} = c$, $y - \frac{2}{3}x\sqrt{ax} = c'$. Die erstere giebt $(y - c)^2 = \frac{4}{9}ax^3$, die zweyte $(y - c')^2 = \frac{4}{9}ax^3$, welche nur in den constanten Größen verschieden sind.

Sey $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2x}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{x^4}{a^4} = 0$; so erhält man durch die Auflösung dieser Gleichung

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a} \pm \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, und, wenn man integrirt,

$$y = \frac{x^3}{2a} \pm \frac{2}{3}\frac{a^2 - x^2}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2} + C,$$

oder $(y - \frac{x^2}{2a} - C)^2 = \frac{4}{9}\frac{(a^2 - x^2)^3}{a^4}$.

§. 168. Die Schwierigkeiten, welche die Auflösung der höheren Gleichungen dieser Methode entgegengesezt, kann man in vielen Fällen dadurch vermeiden, daß man die veränderlichen Größen x und y durch eine dritte veränderliche Größe ausdrükt. Wäre zum Beyspiel die vorgegebene Differentialgleichung so beschaffen, daß man leichter x durch $\frac{dy}{dx}$, als die leztere durch die erstere ausdrücken könnte; so sezze man $\frac{dy}{dx} = p$, und drücke x durch p aus. Es sey $x =$ einer Function fp von p. Da vermöge der Voraussezung $\frac{dy}{dx} = p$, oder $dy = pdx$ ist, und $d.px = pdx + xdp$; so wird man haben $\left.\begin{matrix}\int pdx \\ \text{oder } y\end{matrix}\right\} = px - \int xdp,$

$$= p.fp - \int dpfp, \text{ weil } x = fp.$$

Die zwey veränderlichen Größen x und y werden also durch dieselbe veränderliche Größe p ausgedrükt, und es können zusammengehörige Werthe von x und y für beliebige Werthe von p gefunden werden. Auf ähnliche Art verfährt man, wenn y sich unmittelbar durch p ausdrücken läßt, wo x durch Integriren gefunden werden muß. Kann man aus den zwey Gleichungen zwischen x, y und p die Größe p eliminiren; so erhält man eine Gleichung zwischen x und y.

Sey z. B. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = a\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2$. Man sezze $\frac{dy}{dx} = p$; so hat man

$$yp^3 = a(1 + p^2)^2, \text{ und } y = \frac{a(1 + p^2)^2}{p^3}$$

Da hier $dx = \frac{dy}{p}$, und $d.\frac{y}{p} = \frac{dy}{p} - \frac{ydp}{p^2}$; so ist

$$\left.\begin{matrix}\int \frac{dy}{p} \\ \text{oder } x\end{matrix}\right\} = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2},$$

$$= \frac{a(1+p^2)^2}{p^4} + \int \frac{a(1+p^2)^2 dp}{p^5},$$

$$= \frac{a(1+p^2)^2}{p^4} + a\int\left(\frac{dp}{p^5} + \frac{2dp}{p^3} + \frac{dp}{p}\right),$$

$$= \frac{a(1+p^2)^2}{p^4} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{a}{p^4} - \frac{a}{p^2} + a\,\mathrm{Lg}.\,p + C,$$

$$= \frac{3a}{4p^4} + \frac{a}{p^2} + a + a\,\mathrm{Lg}.\,p + C.$$

Rechnet man die constante Größe a zu der willkührlichen Constanten C; so wird

$$x = \frac{3a}{4p^4} + \frac{a}{p^2} + a\,\mathrm{Lg}.\,p + \mathrm{Const.}$$

Sey $x + a\frac{dy}{dx} = b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Sezt man wiederum $\frac{dy}{dx} = p$; so wird $x + ap = b\sqrt{1+p^2}$, $x = -ap + b\sqrt{1+p^2}$, und es ist noch y zu bestimmen übrig.

Es ist aber hier $pfp = -ap^2 + bp\sqrt{1+p^2}$,

und $\int dpfp = -\int apdp + b\int dp\sqrt{1+p^2}$,

$$= -\tfrac{1}{2}ap^2 + \tfrac{1}{2}bp\sqrt{1+p^2} + \frac{b}{2}\,\mathrm{Lg}.\,(p+\sqrt{1+p^2})$$

(§. 129. Zus.);

folglich $y = \frac{1}{2}bp\sqrt{1+p^2} - \frac{1}{2}ap^2 - \frac{1}{2}b\,\mathrm{Lg}.(p+\sqrt{1+p^2}) + \mathrm{Const.}$

§. 169. Wir wollen jezt annehmen, daß die zwey veränderlichen Größen x und y zugleich in der vorgegebenen Differentialgleichung vorkommen, aber eine derselben, z. B. y nur auf den ersten Grad steige. Macht man $\frac{dy}{dx} = p$; so wird man haben $y =$ einer Function $f(p, x)$ von p und x und es wird seyn

$$\left.\begin{matrix} dy \\ \text{oder } pdx \end{matrix}\right\} = \frac{d.f(p,x)}{dx}\cdot dx + \frac{d.f(p,x)}{dp}\,dp,$$

$= Rdx + Sdp$ zur Abkürzung, wo R und S gegebene Functionen von p und x sind. Bringt man alle Glieder auf einerley Seite des Gleichheitszeichens; so erhält man die Gleichung

$$(R-p)\,dx + Sdp = 0.$$

Kann man diese integriren; so hat man zwischen p, x und der bey dem Integriren hinzugefügten willkührlichen beständigen Größe eine Gleichung, mittelst welcher man die Größe p aus der vorgegebenen Gleichung eliminiren, und eine Gleichung zwischen x und y finden kann, welche, da sie die bey dem Integriren der Gleichung $(R-p)\,dx+Sdp=0$ hinzugefügte willkührliche Constante enthält, die gesuchte Integralgleichung seyn wird.

Sey z. B. $y-x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0$; so ist $y=x\sqrt{1+p^2}$, und daher

$$\left.\begin{matrix} dy \\ \text{oder } pdx \end{matrix}\right\} = dx\sqrt{1+p^2}+\frac{xpdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$(\sqrt{1+p^2}-p)\,dx+\frac{xpdp}{\sqrt{1+p^2}}=0,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}}{\sqrt{1+p^2}-p}=0,$$ oder, wenn man Zähler und Nenner des zweyten Glieds mit $\sqrt{1+p^2}+p$ multiplicirt,

$$\frac{dx}{x}+pdp+\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}=0,$$ und, wenn man integrirt, (das lezte Glied nach §. 129. n. 1. u. 123. n. 1.),

$$\text{Lg.}\,x+\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{2}p\sqrt{p^2+1}-\tfrac{1}{2}\text{Lg.}\,(p+\sqrt{1+p^2})=C.$$

Vermöge der gegebenen Differentialgleichung ist aber $\sqrt{1+p^2}=\frac{y}{x}$, und $p=\frac{1}{x}\sqrt{y^2-x^2}$; folglich

$$\text{Lg.}\,x+\frac{y^2-x^2}{2x^2}+\frac{y\sqrt{y^2-x^2}}{2x^2}-\tfrac{1}{2}\text{Lg.}\,\frac{\sqrt{y^2-x^2}+y}{x}=C,$$

oder $$\frac{y^2-x^2+y\sqrt{y^2-x^2}}{x^2}+\text{Lg.}\,x(y-\sqrt{y^2-x^2})=2C.$$

§. 170. Unter dem in dem vorhergehenden §. betrachteten Fall ist folgende Differentialgleichung begriffen

$$y=x\,\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$$=x.p+f(p),$$ wo $f(p)$ eine gegebene Function von

p bezeichnet, welche auſſer p oder $\frac{dy}{dx}$ keine andere veränderliche Gröſſe enthält. Differentiirt man dieſe Gleichung; ſo erhält man

$$\text{oder } \left.\begin{matrix} \frac{dy}{dx} \\ p \end{matrix}\right\} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{d.f(p)}{dp}\frac{dp}{dx}.$$

Folglich iſt $0 = \left(x + \frac{d.f(p)}{dp}\right)\frac{dp}{dx}$,

und daher 1.) $x + \frac{d.f(p)}{dp} = 0$,

2.) $\frac{dp}{dx} = 0$.

Weil nun $f(p)$ eine gegebene Function von p iſt; ſo iſt $\frac{d.f(p)}{dp}$ ebenfalls eine gegebene Function $f'(p)$ von p, und man hat zwiſchen x, y und p zwey Gleichungen, nemlich die vorgegebene Gleichung, und die Gleichung n. 1., mittelſt welcher man p eliminiren, und ohne Integration eine Integralgleichung finden kann, welche zwar der vorgegebenen Differentialgleichung Genüge leiſten, aber keine andere conſtante Gröſſen enthalten wird, als diejenigen, welche in der vorgegebenen Differentialgleichung noch vorhanden waren. Da nun einer vorgegebenen Differentialgleichung eine unbegränzte Anzahl von particulären Integralgleichungen entſpricht, indem man derjenigen conſtanten Gröſſe, welche bey dem Differentiiren entweder von ſelbſt herausfällt, oder durch die Verbindung der ſo erhaltenen Differentialgleichung mit der Integralgleichung eliminirt werden kann, eine unbegränzte Anzahl verſchiedener Werthe geben kann; ſo kann obige ohne Integration erhaltene Gleichung, welche der vorgegebenen Differentialgleichung $y = x.p + f(p)$ Genüge leiſtet, nicht das allgemeine Integral der vorgegebenen Differentialgleichung, ſondern nur eine particuläre Auflöſung derſelben ſeyn.

Aus der Gleichung n. 2. erhält man durch das Integriren,

$$\text{oder } \left.\begin{matrix} p \\ \frac{dy}{dx} \end{matrix}\right\} = c,$$

und $y = cx + c'$, wo c, c' constante Größen sind, welche aber nicht beyde zugleich willkührlich seyn können. Denn vermöge der vorgegebenen Differentialgleichung muß $y = px + f(p)$, und daher, wenn man $p = c$ macht, $f(p) = f(c) =$ einer gegebenen Function von c seyn. Das Integral der vorgegebenen Differentialgleichung ist also

$y = cx + f(c)$, wo c eine willkührliche Constante ist.

Wirklich ist $\frac{dy}{dx} = c$; folglich, wenn man diesen Werth von c in die gefundene Gleichung sezt, $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

§. 171. Sey z. B. $ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

oder $y - x\frac{dy}{dx} = n\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; so ist, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ sezt, $y = x.p + n\sqrt{1+p^2}$, und, wenn man differentiirt,

$$\left.\begin{matrix}\frac{dy}{dx}\\ \text{oder } p\end{matrix}\right\} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{np\frac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}},$$

d. i. $0 = \left(x + \frac{np}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}$;

folglich 1.) $x + \frac{np}{\sqrt{1+p^2}} = 0$,

2.) $\frac{dp}{dx} = 0$.

Aus der lezteren erhält man $p = c$, oder $\frac{dy}{dx} = c$, und daher $y = cx + c'$. Die constante Größe c' wird, wie man in dem vorhergehenden §. gesehen hat, durch die c bestimmt, und $= n\sqrt{1+c^2}$, weil $y = x.p + n\sqrt{1+p^2}$ vermöge der vorgegebenen Gleichung. Folglich ist die gesuchte Integralgleichung

$y = cx + n\sqrt{1+c^2}$, aus welcher man erhält $\frac{dy}{dx} = c$, und

$$y = x\frac{dy}{dx} + n\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Aus der Gleichung n. 1. erhält man $p = \pm\frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2}}$,

und, wenn man diesen Werth von p in die gegebene Differentialgleichung sezt,

$y^2 + x^2 = n^2$, welche Gleichung ebenfalls der vorgegebenen Differentialgleichung Genüge leistet. Denn es ist

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},\ x\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y},$$

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+x^2}{y} = \frac{n^2}{y},$$

$$\text{und } 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{y^2} = \frac{n^2}{y^2};$$

$$\text{folglich } n\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{n^2}{y} = y - x\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Die Auflösung folgender Aufgabe führt auf diese Differentialgleichung. Man soll die krumme Linie finden, welche die Eigenschaft hat, daß alle von einem in ihrer Ebene liegenden gegebenen Punkt auf die Tangenten der krummen Linie gefällten Perpendickel einer gegebenen Linie n gleich seyen. Um diese Aufgabe aufzulösen, nehme man den gegebenen Punkt als Anfangspunkt der Abscissen x, und den Coordinatenwinkel gleich einem rechten Winkel an; so ist die Subtangente $= y\frac{dx}{dy}$ (§. 66.) Fig. 7., mithin wenn man annimmt, daß der Punkt der Tangente, auf welchen das Perpendickel hintrifft, zwischen den Berührungspunkt und den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe falle, das zwischen dem gegebenen Punkt und zwischen der Tangente liegende Segment AT der Axe der Abscissen $= \frac{ydx}{dy} - x$, welches sich zu dem aus dem gegebenen Punkt auf die Tangente gefällten Perpendickel AR verhält, wie die Normallinie zu der Subnormallinie, oder wie $\frac{ds}{dy} : 1$ (§. 75.). Man wird also die Proportion haben

$$\frac{ydx}{dy} - x : n = \frac{ds}{dy} : 1,$$

aus welcher man die Gleichung erhält

$$ydx - xdy = nds = n\sqrt{dx^2+dy^2},$$

$$\text{oder } y - x\frac{dy}{dx} = n\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Dieser Differentialgleichung entspricht, wie man oben gefunden hat, die Integralgleichung

$$y = cx + n\sqrt{1+c^2},$$

eine Gleichung für eine gerade Linie, welche gegen die Axe der Abscissen unter einem Winkel geneigt ist, dessen trigonometrische Tangente $= c$, und dessen Cosecante $= \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}$ $= \sqrt{\frac{1}{c^2}+1}$ ist. Für $x = -\frac{n\sqrt{1+c^2}}{c}$ wird $y = 0$, wodurch der Punkt gegeben ist, in welchem diese gerade Linie die Axe der Abscissen schneidet. Es folgt hieraus, daß, wenn man aus dem gegebenen Punkt eine gerade Linie $= n$ unter einem beliebigen Winkel mit der Axe der Abscissen, und durch den Endpunkt der ersteren eine gerade Linie zieht, welche mit ihr einen rechten Winkel macht, man für diese die Gleichung haben werde $y = cx + n\sqrt{1+c^2}$, wenn c die Cotangente des Winkels ist, welchen die gerade Linie n mit der Axe der Abscissen macht. Die Constante c ist willkührlich, nnd es giebt daher eine unbegränzte Anzahl gerader Linien, welche so liegen, daß das aus dem gegebenen Punkt auf sie gefällte Perpendickel der gegebenen Linie n gleich wird. Weil aber n von gegebener Größe ist; so berühren alle diese Linien einen aus dem gegebenen Punkt als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser n beschriebenen Kreis, und diesem entspricht die aus der Verbindung der Gleichung n. 1. mit der gegebenen Differentialgleichung entstandene Gleichung

$$y^2 + x^2 = n^2,$$

welche nur eine particuläre Auflösung der Differentialgleichung ist, indem sie statt der unbegränzten Anzahl gerader Linien eine bestimmte krumme Linie giebt. Auf der anderen Seite löst aber die Gleichung $y^2 + x^2 = n^2$ allein obige geometrische Aufgabe im Sinn ihrer Aussage auf.

§. 172. Sey allgemein $F(x, y, c) = 0$ eine Gleichung zwischen x, y und gegebenen Größen, und zwischen der willkührlichen constanten Größe c. Man differentiire diese Gleichung; so wird man haben

$\frac{d.F(x,y,c)}{dx} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{d.F(x,y,c)}{dy} = 0$ (§. 42.), welche Gleichung die constante Größe c nicht mehr enthalten wird, wenn c für sich blos durch Addition oder Subtraction mit den veränderlichen Größen verbunden war. In den übrigen Fällen wird die Differentialgleichung noch die Constante c enthalten. Aber man kann jezt durch die Verbindung dieser Gleichung mit der $F(x,y,c) = 0$ die Constante c eliminiren, so daß man folgende Differentialgleichung haben wird

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

welche die Constante c nicht mehr enthält. Nun wird aber das Resultat der Elimation von c dasselbe seyn, was auch die Größe c, sey sie constant oder veränderlich, seyn mag, wenn nur die zwey Gleichungen

$$F(x,y,c) = 0, \text{ und } \frac{d.F(x,y,c)}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d.F(x,y,c)}{dy} = 0$$

dieselben bleiben. Folglich wird auch dieselbe Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

aus der Gleichung $F(x,y,c) = 0$ entstehen können, wenn man c veränderlich und als Function von x annimmt, wenn nur die durch das Differentiiren der Gleichung $F(x,y,c) = 0$ erhaltene Gleichung ebenfalls

$\frac{d.F(x,y,c)}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d.F(x,y,c)}{dy} = 0$ wird.

Betrachtet man aber c als veränderlich, und als eine Function von x, so erhält man, wenn man die Gleichung $F(x,y,c) = 0$ differentiirt,

$$\frac{d.F(x,y,c)}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d.F(x,y,c)}{dy} + \frac{dc}{dx} \cdot \frac{d.F(x,y,c)}{dc} = 0.$$

Also wird die erwähnte Bedingung statt finden, wenn das Glied $\frac{dc}{dx} \cdot \frac{d.F(x,y,c)}{dc}$ verschwindet. Hieraus folgt, daß der aus der Gleichung

$$F(x,y,c) = 0$$

gezogene Werth von y ebenfalls der Differentialgleichung

$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$

Genüge leisten werde, wenn man statt c eine durch die Gleichung

$\frac{dc}{dx} \cdot \frac{d.F(x,y,c)}{dc} = 0$

bestimmte Function von x nimmt. Diese Gleichung giebt

entweder $\frac{dc}{dx} = 0$, oder $\frac{d.F(x,y,c)}{dc} = 0$.

Die Gleichung $\frac{dc}{dx} = 0$ giebt c = irgend einer constanten Größe, welches der Fall der gewöhnlichen Integralgleichung ist, in welcher c die willkührliche Constante ist. Die andere Gleichung $\frac{d.F(x,y,c)}{dc} = 0$ aber wird, weil $\frac{d.F(x,y,c)}{dc}$ im allgemeinen eine Function von x, y und c ist, durch ihre Auflösung den Werth von c durch x und y ausgedrükt geben, und man wird, wenn dieser Werth in die Gleichung $F(x, y, c) = 0$ gesezt wird, eine neue Gleichung zwischen x und y ohne eine willkührliche Constante haben, welche derselben Differentialgleichung Genüge leisten, aber nothwendig von dem gewöhnlichen Integral der Differentialgleichung $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ verschieden seyn wird, weil in dieser die Größe c eine willkührliche Constante ist, in jener anderen hingegen c eine Function von x und y wird.

Wenn man also aus den zwey Gleichungen

$Fx, y, c) = 0$ und $\frac{d.F(x.y,c))}{dc} = 0$

die Größe c eliminirt; so wird man eine Gleichung zwischen x und y haben, welche der Differentialgleichung $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, deren gewöhnliches Integral die Gleichung

$F(x, y, c) = 0$ mit der willkührlichen Constanten c ist, Genüge leisten, aber nur eine particuläre Auflösung seyn wird.

Weil aber das Wesentliche dieser Auflösung darinn besteht, daß der Werth von c eine Function der veränder-

lichen Größen seyn muß; so ist zu bemerken, daß die gefundene Gleichung aufhören würde eine particuläre Auflösung zu seyn, wenn man aus der Gleichung $\frac{d.F(x,y,c)}{dc} = 0$ für c einen constanten Werth, oder eine solche Function von x und y erhielte, welche vermöge der Gleichung $F(x,y,c) = 0$, in welcher dieser Werth von c substituirt werden muß, einer constanten Größe gleich würde, oder welche bey dieser Substitution dasselbe Resultat geben würde, welches man durch die Substitution eines constanten Werths von c erhalten würde. Die Gleichung würde alsdenn nur ein besonderer Fall des gewöhnlichen Integrals seyn, wenn die willkührliche Constante einen bestimmten Werth erhält *).

§. 173. Sey z. B. $x + y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+y^2-a^2}$; so ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} \\ \text{oder } \frac{d.(x^2+y^2-a^2)}{2\sqrt{x^2+y^2-a^2}} \end{array}\right\} = dy, \text{ und, wenn man integrirt,}$$

$\sqrt{x^2+y^2-a^2} = y + c$, wo c die willkührliche Constante ist.

Macht man diese Gleichung rational; so wird

$$x^2 + y^2 - a^2 = (y+c)^2,$$

oder $x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0$. Man differentiire die leztere Gleichung, indem man die Größe c allein als veränderlich betrachtet; so wird man haben

$-2y - 2c = 0$, $-y = c$. Dieser Werth von c in die rationale gemachte Gleichung gesezt gibt $x^2 + 2y^2 - y^2 - a^2 = 0$, oder $x^2 + y^2 = a^2$, welches die particuläre Auflösung der Gleichung $x + y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ ist. Denn aus der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$, in welcher die willkührliche Constante c nicht mehr vorkommt, erhält man $x + y\frac{dy}{dx} = 0$, und $\sqrt{x^2+y^2-a^2} = 0$.

In dem Beyspiel des 171sten §. hat man für die Gleichung $y - x\frac{dy}{dx} = n\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ gefunden die Integralgleichung

*) Leçons sur le calcul des fonctions par *Lagrange*. Leçon 14.

$y = cx + n\sqrt{1 \quad ^2}$, in welcher c die willkührliche Constante ist. Man differentiire diese Gleichung in Beziehung auf c; so erhält man die Gleichung

$$o = x + \frac{nc}{\sqrt{1+c^2}},$$ und aus dieser

$$c = \pm \frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2}},$$ wo das Subtractionszeichen gebraucht werden muß, weil $x + \frac{nc}{\sqrt{n^2 - x^2}} = o$ seyn soll. Sezt man diesen Werth von c in die Integralgleichung; so erhält man die particuläre Auflösung $y^2 + x^2 = n^2$, weil diese Gleichung keine willkührliche Constante enthält. Ebendeswegen wird aber durch die Gleichung $y^2 + x^2 = n^2$ die geometrische Aufgabe des 171sten §. aufgelöst. Denn sie leistet der Differentialgleichung $y - x\frac{dy}{dx} = n\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ Genüge, was auch der Werth von c, d. i. von $\frac{dy}{dx}$ seyn mag.

Hieher gehören die Auflösungen der Aufgaben des 77sten §.

Wäre die Integralgleichung folgende:

$(x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2cy) + (x^2 - b)c^2 = o$, und c die willkührliche Constante; so würde man durch das Differentiiren in Beziehung auf c erhalten

$$-2y(x^2 + y^2 - b) + 2c(x^2 - b) = o,$$

und daher $c = \frac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b}$, welcher Werth von c in die vorgegebene Gleichung gesezt giebt $\frac{y^4(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b} = o$, oder $x^2 + y^2 - b = o$. Da aber vermöge dieser Gleichung der Werth von c selbst, welcher für die particuläre Auflösung eine Function von x oder y seyn sollte, verschwindet; so wird die Gleichung $x^2 + y^2 - b$ nur ein besonderer Fall er Integralgleichung seyn. Wirklich verwandelt sich obige Integralgleichung in $x^2 + y^2 - b = o$, wenn man die willkührliche Constante $c = o$ sezt.

Siebentes Capitel.

Von der Integration der Differentialgleichungen der zweyten Ordnung.

§. 174. Sey 1.) $\frac{d^2.y}{dx^2} + X = 0$, und X eine Function von x allein; so ist (§. 154.)

$\frac{dy}{dx} + \int X dx = C$, und, wenn man noch einmal integrirt

$y + \int dx \int X dx = Cx + C'$, wo C, C' die willkührlichen constanten Grösßen sind.

Sey 2.) $\frac{d^2.y}{dx^2} + Y = 0$, und Y eine Function von y allein; so ist

$$2. \frac{dy}{dx} \frac{d^2.y}{dx} + 2Y dy = 0,$$

oder $d.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2Y dy = 0$, und daher

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\int Y dy = \text{Const.} = c^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{c^2 - 2\int Y dy},$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - 2\int Y dy}} = x + \text{Const.}$$

Sey z. B. $Y = ky$, wo k eine unveränderliche Grösße bezeichnet; so ist

$2Y dy = 2ky dy$, und $2\int Y dy = ky^2$. Folglich wird in diesem Fall

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{c^2 - ky^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\frac{c^2}{k} - y^2}}, \text{ mithin}$$

$$x + C = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{Arc. Sin.} \frac{y\sqrt{k}}{c}, \text{ (122. n. 1.)},$$

oder $y = \frac{c}{\sqrt{k}} \text{Sin.}(x\sqrt{k} + C\sqrt{k})$, wo c und C die zwey willkührlichen Constanten sind.

Die hier betrachtete Differentialgleichung wurde durch

die Multiplication mit $\frac{dy}{dx}$ zu der Integration vorbereitet. Da nun vermöge der gefundenen Integralgleichung $\frac{dy}{dx} = c\,\text{Cos.}(x\sqrt{k} + C\sqrt{k})$ ist; so würde man statt des Factors $\frac{dy}{dx}$ auch den Factor $c\,\text{Cos.}(x\sqrt{k} + C\sqrt{k})$, oder $\text{Cos.}(x\sqrt{k})$ gebrauchen können. Multiplicirt man nemlich die Gleichung

$\frac{d^2.y}{dx^2} + ky = 0$ mit $\text{Cos.}\,x\sqrt{k}$; so erhält man

$\frac{d^2.y}{dx^2}\,\text{Cos.}\,x\sqrt{k} + ky\,\text{Cos.}\,x\sqrt{k} = 0$, oder

$d.\left(\frac{dy}{dx}\right)\text{Cos.}\,x\sqrt{k}.\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) + kydx\,\text{Cos.}\,x\sqrt{k} = 0$,

d. i. $d.\left(\frac{dy}{dx}\,\text{Cos.}\,x\sqrt{k} + y\sqrt{k}.\,\text{Sin.}\,x\sqrt{k}\right) = 0$.

Folglich ist *a.*) $\frac{dy}{dx}\,\text{Cos.}\,x\sqrt{k} + y\sqrt{k}\,\text{Sin.}\,x\sqrt{k} = C$.

Und weil das Differential des Sinus von dem Differential des Cosinus nur dem Zeichen nach verschieden ist; so wird man ebenso gut den Factor $\text{Sin.}\,x\sqrt{k}$ gebrauchen können. Man findet mittelst dieses Factors

b.) $\frac{dy}{dx}\,\text{Sin.}\,x\sqrt{k} - y\sqrt{k}\,\text{Cos.}\,x\sqrt{k} = C'$.

Jezt kann man aus den zwey Gleichungen *a* und *b* den Exponenten $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, und eine Gleichung zwischen x und y finden. Man multiplicire die Gleichung *a* mit $\text{Sin.}\,x\sqrt{k}$, die Gleichung *b* mit $\text{Cos.}\,x\sqrt{k}$, und ziehe von der ersteren die zweyte ab; so findet man

$y\sqrt{k} = C\,\text{Sin.}\,x\sqrt{k} - C'\,\text{Cos.}\,x\sqrt{k}$, welche Gleichung von der vorhin gefundenen

$y\sqrt{k} = c\,\text{Sin.}(x\sqrt{k} + C\sqrt{k})$ nur in der Form verschieden ist.

Sey 3.) $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y + X = 0$. Man multiplicire diese Gleichung nach der Analogie des vorhergehenden Falls mit $\text{Cos.}\,ax$; so erhält man

$\frac{d^2y}{dx^2}\,\text{Cos.}\,ax + a^2y\,\text{Cos.}\,ax + X\,\text{Cos.}\,ax = 0$,

oder $\text{Cos.}\, ax\, d.\left(\frac{dy}{dx}\right) + a^2 y dx\, \text{Cos.}\, ax + X dx\, \text{Cos.}\, ax = 0$,

und, wenn man integrirt,

$$A.)\ \frac{dy}{dx}\ \text{Cos.}\, ax + ay\, \text{Sin.}\, ax + \int X dx\, \text{Cos.}\, ax = C.$$

Ebenso findet sich, wenn die vorgegebene Gleichung mit $\text{Sin.}\, ax$ multiplicirt, und hierauf integrirt wird,

$$B.)\ \frac{dy}{dx}\ \text{Sin.}\, ax - ay\, \text{Cos.}\, ax + \int X dx\, \text{Sin.}\, ax = C'.$$

Man eliminire $\frac{dy}{dx}$ aus den zwey Gleichungen A und B; so findet man

$$ay = C\, \text{Sin.}\, ax - C'\, \text{Cos.}\, ax - \text{Sin.}\, ax \int X dx\, \text{Cos.}\, ax + \text{Cos}\, ax \int X dx\, \text{Sin.}\, ax,$$

$$\text{oder } C.)\ y = \frac{C - \int X dx\, \text{Cos.}\, ax}{a}.\text{Sin.}\, ax - \frac{C' - \int X dx\, \text{Sin.}\, ax}{a}\, \text{Cos.}\, ax,$$

wo C und C' die zwey willkührlichen Constanten sind.

Daß obiger Differentialgleichung der zweyten Ordnung zwey verschiedene Differentialgleichungen der ersten Ordnung Genüge leisten, von welchen die eine A die willkührliche Constante C, die andere B die Constante C' enthält, läßt sich so erklären. Sey $U = 0$ eine Gleichung zwischen x, y und den Constanten C, C'. Man differentiire diese Gleichung zweymal nach einander; so erhält man die Gleichungen $\frac{dU}{dx} = 0$, $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$, durch deren Verbindung mit der Gleichung $U = 0$ man die Constanten C, C' eliminiren, und eine Differentialgleichung der zweyten Ordnung finden kann, welche weder C noch C' enthält. Die Verbindung der Gleichungen $U = 0$, $\frac{dU}{dx}$ 0 wird aber auf zwey verschiedene Differentialgleichungen der ersten Ordnung führen, je nachdem man C oder C' eliminirt. Wenn man z. B. mittelst der Gleichung C und der aus ihr abgeleiteten Differentialgleichung der ersten Ordnung die Constante C' eliminirt; so erhält man die Gleichung A, durch die Elimination von C aber erhält man die Gleichung B.

§. 175. Wenn eine Differentialgleichung nur die veränderlichen Größen $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$ enthält; so seze man $\frac{dy}{dx} = p$. Alsdenn ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, und die Differentialgleichung wird auf die Form $\frac{dp}{dx} = P$ gebracht werden können, wo P eine Function von p ist. Aus dieser erhält man $x = C + \int \frac{dp}{P}$. Und weil $dy = pdx = p \cdot \frac{dp}{P}$; so wird $y = C' + \int \frac{pdp}{P}$. Folglich erhält man x und y durch dieselbe dritte veränderliche Größe p ausgedrükt, welche man nach geschehener Integration eliminiren kann, um eine Gleichung zwischen x und y zu erhalten.

Sey z. B. $\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + a = 0$; so wird, wenn man $\frac{dy}{dy} = p$ sezt,

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}} + a\,\frac{dp}{dx} = 0, \text{ und daher}$$

$$dx + a \cdot \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \text{ und } dy + a \cdot \frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Es ist aber nach §. 106. pag. 235. $\int \frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, und nach §. 130., wenn man $1+p^2 = p^2z$ sezt,

$$\int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}; \text{ folglich ist}$$

$$x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = C, \text{ und } y + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} = C'. \text{ Die erste dieser Gleichungen giebt}$$

$(x-C)^2 = \frac{a^2p^2}{1+p^2}$, die zweyte $(y-C')^2 = \frac{a^2}{1+p^2}$. Mithin ist

$(x-C)^2 + (y-C')^2 = \frac{a^2(p^2+1)}{1+p^2} = a^2$ die gesuchte Integralgleichung.

Sey a. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Die Voraussetzung $\frac{dy}{dx} = p$ giebt

$dx = \frac{adp}{\sqrt{1+p^2}}$, und $dy = pdx = a.\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}$. Folglich ist

$x + C = a\,\mathrm{Lg}.(p + \sqrt{1+p^2})$ (§. 123. n. 1.),

und $y + C' = a\sqrt{1+p^2}$. Da nun vermöge der lezteren Gleichung $\sqrt{1+p^2} = \frac{y+C'}{a}$, und $p = \frac{1}{a}\sqrt{(y+C')^2 - a^2}$; so ist die gesuchte Integralgleichung

$$x + C = a\,\mathrm{Lg}.\left(\frac{y + C' + \sqrt{(y+C')^2 - a^2}}{a}\right)$$

§. 176. Wenn eine Gleichung zwischen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ und der veränderlichen Größe x gegeben ist, und $\frac{dy}{dx} = p$, mithin $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ gesezt wird; so verwandelt sie sich in eine Differentialgleichung der ersten Ordnung. Kann man diese integriren, und p durch x ausdrücken; so wird man haben $y = C + \int p dx$. Wäre aber x durch p gegeben; so würde man haben $y = px - \int x dp$ (§. 127.).

Auf ähnliche Art kann man verfahren, wenn eine Gleichung zwischen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ und y gegeben ist. Sezt man nemlich $\frac{dy}{dx} = p$; so wird $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$, und die verwandelte Gleichung wird nach dieser Substitution nur noch die veränderlichen Größen p, y, dp und dy enthalten. Kann man diese integriren, und p durch y ausdrücken; so wird man haben $x = C + \int \frac{dy}{p}$. Wäre aber y durch p gegeben; so würde

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2}$$ (§. 127.).

Sey z. B. $\left(x^2 + a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} = nx\frac{dy}{dx}$; so ist die verwandelte Gleichung

$$(x^2 + a^2p^2)\frac{dp}{dx} = npx,$$ aus welcher man

nach §. 156. durch die Substitution von pz statt x erhält

$$\frac{dp}{p} = \frac{nzdz}{a^2+(1-n)z^2}.$$

Für $n=1$ ist Lg. $\frac{p}{C} = \int \frac{zdz}{a^2} = \frac{z^2}{2a^2}$,

$$z = a\sqrt{2 \text{ Lg. } \frac{p}{C}},$$

$$\left.\begin{matrix} pz \\ x \end{matrix}\right\} = ap\sqrt{2 \text{ Lg. } \frac{p}{C}},$$

$$y = ap^2\sqrt{2 \text{ Lg. } \frac{p}{C}} - a\int pdp\sqrt{2 \text{ Lg. } \frac{p}{C}} + C'.$$

In den übrigen Fällen ist Lg. $p = \frac{n}{2(1-n)}$ Lg. $(a^2+(1-n)z^2)$ + Lg. c,

$$p = c\left(a^2+(1-n)z^2\right)^{\frac{n}{2(1-n)}},$$

$$\left.\begin{matrix} pz \\ x \end{matrix}\right\} = cz\left(a^2+{}^2+(1-n)z^2\right)^{\frac{n}{2(1-n)}}.$$

Sodenn ist $y = px - \int xdp = c^2z\left(a^2+(1-n)z^2\right)^{\frac{n}{1-n}}$

$$- nc^2\int z^2dz\left(a^2+(1-n)z^2\right)^{\frac{2n-1}{1-n}} + C'.$$

Sey $\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = X\frac{d^2y}{dx^2}$, und X eine Function von x allein; so wird

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = X\frac{dp}{dx}, \text{ oder } \frac{dx}{X} = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mithin $C+\int\frac{dx}{X} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

Man setze zur Abkürzung $C+\int\frac{dx}{X} = V$; so wird $p = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}$, und

$$y = C' + \int pdx = C' + \int \frac{Vdx}{\sqrt{1-V^2}}.$$

§. 177. Sey $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$, P und Q seyen gegebene Functionen von x.

Man setze $y = e^{\int u dx}$, wo u eine neue Function von x bezeichnet; so werden

$\frac{dy}{dx} = ue^{\int u dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = (u^2 + \frac{du}{dx}) e^{\int u dx}$, und die Gleichung verwandelt sich nach der Division mit dem gemeinschaftlichen Factor $e^{\int u dx}$ in folgende

$u^2 + \frac{du}{dx} + Pu + Q = 0$, welche nur von der ersten Ordnung ist, aber selten integrirt werden kann, wenn P und Q veränderlich sind. Sind aber P und Q constant, und beziehungsweise $= A$ und B; so hat man die Gleichung

$u^2 + \frac{du}{dx} + Au + B = 0$, in welcher die veränderlichen Größen von einander abgesondert werden können, wenn man ihr die Form giebt

$\frac{du}{u^2 + Au + B} + dx = 0$, und welche nach §. 108. oder 112. integrirt werden kann, je nachdem $\frac{1}{4} A^2$ größer oder kleiner ist als B. Es ist aber nicht nöthig, die Gleichung $u^2 + \frac{du}{dx} + Au + B = 0$ vollständig zu integriren, und particuläre Werthe von u, welche dieser Gleichung Genüge leisten, sind hinreichend. Man setze u einer constanten Größe m gleich; so hat man $\frac{du}{dx} = 0$, und es muß $u^2 + Au + B = 0$ seyn. Seyen m' und m'' die Wurzeln dieser Gleichung; so wird $\int u dx = m'x + c$ oder $= m''x + c'$, und $y = e^{m'x+c} = e^c . e^{m'x} = Ce^{m'x}$, oder $= C'e^{m''x}$. Der erste Werth von y giebt $\frac{dy}{dx} = Cm'e^{m'x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} Cm'^2e^{m'x}$, und daher

$\frac{d^2y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + By = Ce^{m'x} (m'^2 + Am' + B) = 0$, weil m' eine der Wurzeln der Gleichung $u^2 + Au + B = 0$ ist. Ebenso erhält man mittelst des zweyten Werths von y die Gleichung

$\frac{d^2y}{dx^2} + A \frac{dy}{dx} + By = C'e^{m''x} (m''^2 + Am'' + B) = 0$; folglich wird die Gleichung $y = Ce^{m'x} + C'e^{m''x}$ ebenfalls der Dif-

ferentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0$ Genüge leisten was auch die Werthe von C und C' seyn mögen. Mithin sind C und C' die zwey willkührlichen constanten Größen, und $y = Ce^{m'x} + C'e^{m''x}$ ist das allgemeine Integral der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0$.

Wenn die Wurzeln m' und m'' einander gleich sind; so wird $y = Ce^{mx} + Ce^{mx} = (C + C')e^{mx}$, und die zwey constanten Größen C und C' vereinigen sich in eine Constante c. Die Gleichung $y = ce^{mx}$ wird also in diesem Fall nur ein particuläres Integral. Geht man aber auf die Gleichung $\frac{du}{u^2 + Au + B} + dx = 0$ zurük; so wird man jezt haben

$$\frac{du}{(u-m)^2} + dx = 0, \text{ und daher}$$

$$C - \frac{1}{u-m} + x = 0, \quad u = m + \frac{1}{x+C},$$

$$\int u\,dx = mx + C' + \text{Lg.}(x+C),$$

$$y = e^{mx + C\,\text{Lg.}(x+C)} = e^{C'} \cdot e^{mx} \cdot e^{\text{Lg.}(x+C)},$$

$$= e^{C'} \cdot e^{mx}(x + C) = e^{mx}(cx + c'),$$

wenn man $e^{C'} = c$, und $Ce^{C'} = c$ macht.

Wenn die Wurzeln m', m'' imaginär sind; so sind sie von der Form $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$. In diesem Fall wird $\int u\,dx = ax \pm bx\sqrt{-1} + \text{Const.}$, oder, wenn c eine willkührliche Constante ist,

$$\int u\,dx = a(x+c) \pm b(x+c)\sqrt{-1},$$

$$= ax \pm bx\sqrt{-1} + ac \pm bc\sqrt{-1}.$$

Man seze zur Abkürzung $e^{ac+bc\sqrt{-1}} = C$, und $e^{ac-bc\sqrt{-1}} = C'$; so wird

$$y = Ce^{ax+bx\sqrt{-1}} + C'e^{ax-bx\sqrt{-1}}$$

$$= e^{ax}(Ce^{bx\sqrt{-1}} + C'e^{-bx\sqrt{-1}}),$$

$$= e^{ax}((C+C')\text{Cos.}\,bx + (C-C')\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,bx),$$

(§. 32. n. 4. u 5.),

$$= e^{ax}(C''\text{Cos.}\,bx + C'''\text{Sin.}\,bx), \text{ wenn man } C + C' = C'',$$

und $(C - C')\sqrt{-1} = C'''$ sezt.

§. 178. Eben dieses Verfahren ist auf die allgemei-

nere Gleichung des vorhergehenden §. $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ anwendbar, wenn man zwey particuläre Werthe von y angeben kann, welche dieser Gleichung Genüge leisten. Sind nemlich diese Werthe $= M$ und M'; so wird $y = CM + C'M'$ die allgemeine Integralgleichung mit den willkührlichen Constanten C und C' seyn. Denn es ist

$\frac{dy}{dx} = C\frac{dM}{dx} + C'\frac{dM}{dx}$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = C\frac{d^2M}{dx^2} + C'\frac{d^2M'}{dx^2}$, und es wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = C\left(\frac{d^2M}{dx^2} + P\frac{dM}{dx} + QM\right)$$
$$+ C'\left(\frac{d^2M'}{dx^2} + P\frac{dM'}{dx} + QM'\right) = 0,$$

wenn insbesondere $\frac{d^2M}{dx^2} + P\frac{dM}{dx} + QM = 0$, und $\frac{d^2M'}{dx^2} + P\frac{dM'}{dx} + QM' = 0$; so daß C und C' unbestimmt bleiben, und daher willkührliche constante Größen seyn können.

Kennt man nur einen particulären Werth von y; so setze man, wenn dieser Werth $= M$ ist, $y = Mz$, wo z eine unbestimmte Function von x bezeichnet. Alsdenn werden

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{dM}{dx} + M\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{d^2M}{dx^2} + 2\frac{dM}{dx}\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2}, \text{ und es muß, wenn}$$

man diese Werthe in die vorgegebene Gleichung sezt,

$$z\frac{d^2M}{dx^2} + 2\frac{dM}{dx}\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+ zP\frac{dM}{dx} + PM\frac{dz}{dx} + QMz = 0 \text{ seyn.}$$

Es ist aber vermöge der Voraussetzung $\frac{d^2M}{dx^2} + P\frac{dM}{dx} + QM = 0$; folglich muß $2\frac{dM}{dx}\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2} + PM\frac{dz}{dx} = 0$ seyn.

Man setze $\frac{dz}{dx} = z'$; so wird

$$2z'\frac{dM}{dx} + M\frac{dz'}{dx} + PMz' = 0,$$

oder $Pdx = -2\frac{dM}{M} - \frac{dz'}{z'}$, woraus man erhält

$$\int Pdx = \text{Const.} - 2\,\text{Lg.}\,M - \text{Lg.}\,z'$$

$$= \text{Lg.}\,C - \text{Lg.}\,M^2z' = \text{Lg.}\,\frac{C}{M^2z'},$$

$$\left.\begin{matrix} z' \\ \text{oder } \frac{dz}{dx} \end{matrix}\right\} = \frac{C}{M^2}\,e^{-\int Pdx},$$

$$z = C' + \int \frac{C}{M^2}\,e^{-\int Pdx},$$

$$\left.\begin{matrix} Mz \\ \text{oder } y \end{matrix}\right\} = MC' + M\int \frac{C}{M^2}\,e^{-\int Pdx}.$$

Sey z. B. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{A}{a+bx}\frac{dy}{dx} + \frac{B}{(a+bx)^2} = 0$ zu integriren. Sezt man nach dem vorhergehenden §. $y = e^{\int udx}$; so erhält man die Gleichung

$u^2 + \frac{du}{dx} + \frac{An}{a+bx} + \frac{B}{(a+bx)^2} = 0$, welche sich für $(a+bx)\,u = t$ in folgende verwandelt $t^2 + (a+bx)\frac{dt}{dx} + (A-b)\,t + B = 0$. Es seyen m' und m'' die Wurzeln der Gleichung $t^2 + (A-b)\,t + B = 0$; so wird für $t = m'$ oder m'' auch $\frac{dt}{dx} = 0$, und es sind die zwey particulären Werthe von $u = \frac{m'}{a+bx}$, und $= \frac{m''}{a+bx}$. Mithin sind die zwey Werthe von $\int udx = \frac{m'}{b}\,\text{Lg.}\,(a+bx)$, und $= \frac{m''}{b}\,\text{Lg.}\,(a+bx)$; also die zwey Werthe von $y = e^{\int udx} = (a+bx)^{\frac{m'}{b}}$, und $= (a+bx)^{\frac{m''}{b}}$. Hieraus erhält man endlich die Integralgleichung

$$y = C(a+bx)^{\frac{m'}{b}} + C'(a+bx)^{\frac{m''}{b}}.$$

§. 179. Sey $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$, und P, Q, R seyen gegebene Functionen von x.

Man setze $y = Xz$, wo X eine unbestimmte Function von x bezeichnet; so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$X\left(\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz\right)$$
$$+ 2\frac{dX}{dx}\frac{dz}{dx} + Pz\frac{dX}{dx} + z\frac{d^2X}{dx^2} = R.$$

Es werde z so bestimmt; daß $\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz = 0$; so wird man zu der Bestimmung der Function X die Gleichung haben

$$2\frac{dX}{dx}\frac{dz}{dx} + Pz\frac{dX}{dx} + z\frac{d^2X}{dx^2} = R, \text{ oder, wenn man } \frac{dX}{dx} = X' \text{ sezt,}$$

$$2X'\frac{dz}{dx} + PzX' + z\frac{d.X'}{dx} = R,$$

$$d.X' + \left(P + 2\frac{dz}{zdx}\right)X'dx = \frac{Rdx}{z}.$$

Wenn nun z eine gegebene Function von x ist; so kann man diese Gleichung nach §. 104. integriren, und man wird haben

$$X' = e^{-\int\left(Pdx + 2\frac{dz}{z}\right)}\left(\int e^{\int\left(Pdx + 2\frac{dz}{z}\right)}\frac{Rdx}{z} + C\right),$$

oder, weil $e^{-\int\frac{2dz}{z}} = \frac{1}{z^2}$, $e^{\int\frac{2dz}{z}} = z^2$ ist,

$$X' = \frac{e^{-\int Pdx}}{z^2}\left(\int e^{\int Pdx} Rzdx + C\right).$$

Sodenn $X = \int X'dx + C'$, $y = z\int X'dx + C'z$.

Die Integration der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ hängt also von der Integration der in dem vorhergehenden §. betrachteten Gleichung $\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz = 0$ ab. Es ist aber auch hier keine vollständige Integration dieser lezteren Gleichung nothwendig, und ein particulärer Werth von z, welcher dieser Gleichung Genüge leistet, ist hinreichend, weil die willkührlichen Constanten C und C' in dem Ausdruk von y schon begriffen sind.

§. 180. Wenn P, Q constant, und beziehungsweise $= A, B$ sind; so hängt die Integration der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = R$ von der Integration der Gleichung

$\frac{d^2z}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + Bz + o$ ab, und man leistet vermöge des 178sten §. dieser Gleichung Genüge, wenn man $z = e^{mx}$ sezt, wo m so bestimmt ist, daß $m^2 + Am + B = o$. Da nun in diesem Fall $P = A$, so wird (§. 179.)

$$X' = e^{-(A+2m)x}\left(\int e^{(A+m)x} R dx + C\right),$$

$$\text{und } X = \int e^{-(A+2m)x} dx \int e^{(A+m)x} R dx - \frac{Ce^{-(A+2m)x}}{A+2m} + C',$$

$$= \frac{-e^{-(A+2m)x}\int e^{(A+m)x} R dx + \int e^{-mx} R dx}{A+2m}$$

$$- \frac{Ce^{-(A+2m)x}}{A+2m} + C' \text{ (§. 154.).}$$

Da $z = e^{mx}$, und $y = Xz$; so wird, wenn man n statt $-(A+m)$ sezt,

$$y = C'e^{mx} - \frac{Ce^{nx}}{m-n}$$

$$+ \frac{e^{mx}\int e^{-mx} R dx - e^{nx}\int e^{-nx} R dx}{m-n}.$$

Weil vermöge der Voraussetzung $m + n = -A$; so ist n die andere Wurzel der Gleichung $m^2 + Am + B = o$. Für den Fall, wo $m = n$, ist $A + 2m = o$, und $A + m = -m$; folglich $X' = \int e^{-mx} R dx + C$,

$$X = \int dx \int e^{-mx} R dx + Cx + C',$$

$$= x\int e^{-mx} R dx - \int e^{-mx} R x dx + Cx + C' \text{ (§. 154.),}$$

und $y = e^{mx}\left(x\int e^{-mx} R dx - \int e^{-mx} R x dx\right) + e^{mx}(Cx + C')$.

Wenn die Wurzeln der Gleichung $m^2 + Am + B = o$ imaginär, und $= a \pm b\sqrt{-1}$ sind; so findet man nach den Formeln n. 4. u. 5. §. 32., wenn zur Abkürzung

$C' - \frac{C}{2b\sqrt{-1}} = c$, und $C'\sqrt{-1} + \frac{C}{2b} = c'$ gesezt wird,

$$y = e^{ax}(c \operatorname{Cos.} bx + c' \operatorname{Sin.} bx)$$

$$+ \frac{e^{ax}}{b}(\operatorname{Sin.} bx \int e^{-ax} R dx \operatorname{Cos.} bx - \operatorname{Cos.} bx \int e^{-ax} R dx \operatorname{Sin.} bx),$$

wo c und c' die willkührlichen Constanten sind.

Drukfehler und Verbesserungen.

Seite Lin.

2 4 statt A'''^{3} lies $A'''z^{3}$.

4 2 st. z^{e+1} l. z^{r+1}.

5 1 st. $(1-1)$ l. $(r-1)$.

— 5 st. $(n-(k-1)$ l. $(n-(k-1))$

14 4 st. x l. z.

17 14 st. Δz l. Δx.

18 2 v. u. st. $m-^{1}$ l. $m-1$.

19 2 v. u. st. Δy l. $\Delta y'$.

25 4 st. $<[$ l. $<\Delta x[$

32 9 st. Δn l. Δx.

— 12 st. ng^{n-1} l. ngx^{n-1}.

ebendaselbst st. rhx^{n-1} l. rhx^{r-1}.

37 10 setze man im Nenner Δz.

37 2 v. u. st. $\frac{m(m-1)}{1.2}(x+z)^{m-2}$ l. $\frac{m(m-1)}{1.2}b(x+z)^{m-2}$

38 2 v. u. st. $\frac{m(m-1)}{1.2}(x+z)^{m-2}$ l. $\frac{m(m-1)}{1.2}b(x+z)^{m-2}$

40 6 v. u. st. $\frac{z^2}{1.2}+\frac{d^2fx}{dx^2}$ l. $\frac{z^2}{1.2}\cdot\frac{d^2fx}{dx^2}$.

42 7 st. fx l. $f'x$.

44 2 st. $\frac{\Delta^r y}{\Delta x^r}$ l. $\frac{d^r y}{dx^r}$.

53 7 st. $+\frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}$ l. $-\frac{z(z-1)(z-2}{1.2.3}$

— 8 st. + &c. l. − &c.

62 3 st. + &c. l. ∓ &c.

— 7 st. + &c. l. ∓ &c.

— 9 st. Sin.$(x+z)$ − Sin.$(x+z)$ l. Sin.$(x+z)$ − Sin.$(x-z)$.

64 10 st. $\frac{1}{2.3}$ l. $\frac{1}{1.3}$.

69 5 st. $\frac{d^2P}{dx^2}$ + &c. l. $\frac{d^2P}{dx^2}\cdot\frac{\Delta x}{1.2}$ + &c.

— 9 st. pQ l. Pq.

— 4 v. u. st. $\frac{dQ}{dx}+p$ l. $\frac{dQ}{dx}+q$.

71 9 st. dP l. dP^r.

— 2 v. u. st. $\left(\frac{dp}{dx}+w\right)\Delta x$ l. $\left(\frac{dp}{dx}+w\right)^2\Delta x$

76 11 st. $\frac{d^2p}{dp^2}$ l. $\frac{d^2p}{dx^2}$.

— 6 v. u. st. $\frac{dy}{dx}$ l. $\frac{dp}{dx}$.

— 5 v. u. st. $3F''p$ l. $+3F''p$.

— 11 v. u. st. $\frac{\overline{\Delta x}}{1:2}$ l. $\frac{\overline{\Delta x^2}}{1.2}$.

Seite Lin.

78 2 v. u. ſt. $\frac{dy}{dp} \cdot \frac{dq}{dx}$ l. $\frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx}$.

82 7 v. u. ſt. $d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ l. $\frac{d.\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$.

85 7 ſt. $2\frac{du}{dx}$ Sin. $2u$ l. $\frac{dn}{dx}$ Sin. $2u$.

— 8 ſt. $2\overline{\text{Cos.}\,u}^2$ l. $\overline{\text{Cos.}\,u}^2$.

87 9 ſt. $d.\left(\frac{d^3.y}{dx^3}\right)$ l. $d.\left(\frac{d^3.z}{dx^3}\right)$.

— 14 ſt. $\overline{\Delta y}^3$ l. $\overline{\Delta x}^3$.

89 9 v. u. ſt. o l. 2.

91 3 v. u. ſt. $\frac{dz}{dz}$ l. $\frac{dz}{dy}$.

92 7 ſt. $F(x, z)$ l. $F(x, y)$.

93 3 ſt. $\int x dx$ l. $\int 2x dx$.

95 11 v. u. ſt. $+ x^n . x^{m-1} fm$ l. $= x^n . x^{m-1} fm$.

103 9 v. u. ſt. $\frac{3}{x}$ l. $\frac{2c^3}{x}$.

108 5 v. u. ſt. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ l. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

109 7 v. u. ſt. zwey Einheiten l. eine Einheit.

110 10 v. u. ſt. $\frac{1}{4}(a - x^2$ l. $\frac{1}{4}(a - x)^2$.

112 9 v. u. ſt. $f(x . y)$ l. $f(x, y)$.

— 1 v. u. ſt. $\frac{d^2z}{dx^2}$ l. $\frac{d^2z}{dy^2}$.

113 10 ſt. Maximum l. Minimum.

114 15 ſt. $\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2} \frac{d^2z}{dx^2}$ l. $\frac{\overline{\Delta y}^2}{1.2} \frac{d^2z}{dy^2}$.

118 4 ſt. $\frac{1}{s'}\left(\left(\frac{x-a'}{s'}\right)^2\right)$ l. $\frac{1}{s'}\left(1-\left(\frac{x-a'}{s'}\right)^2\right)$.

— 8 ſt. $\frac{ds}{ds}$ l. $\frac{ds}{dy}$.

— 3 v. u. ſt. $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$ l. $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$.

120 10 ſt. Cos. $(w' - m'')$ l. Cos. $(w' - w'')$.

122 10 v. u. ſt. $\frac{d^3fx}{dx^3}$ l. $\frac{d^3fx}{dx^3}$.

— 7 v. u. ſt. $\frac{z^2}{1.2}$ l. $\frac{z^2}{1.2}$.

123 6 v. u. ſt. d^3P l. d^2P.

124 5 ſt. $\frac{3}{\sqrt{x^2-a^2}}$ l. $\frac{3x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

— 2 v. u. ſt. $(2a)^4$ l. $(2a)^5$.

125 16 ſt. z^6 l. z^5.

Seite Lin.

125 17 ſt. $1+\frac{z}{a^2}$ l. $1-\frac{z^2}{a^2}$.

126 13 v. u. ſetze man = voran.

129 13 ſt. = l. ≤.

130 16 ſt. *RS* l. *Rs*.

131 5 ſt. ≤ l. ≥.

— 6 ſt. Fig. *A*. l. Fig. 4.

132 7 v. u. ſt. negativ l. poſitiv.

— 6 v. u. ſt. poſitiv l. negativ.

133 8 u. 9 v. u. ſt. entgegengeſezte l. einerley.

134 1 ſt. $(p-\frac{p}{a}x)$ l. $(p-\frac{p}{a}x)^2$.

— 1 v. u. ſt. *PN* l. *MN*.

135 10 v. u. ſt. $-y\frac{dx}{dy}\,\mathrm{Cos.}\,c-y\,\overline{\mathrm{Cos.}\,c}$ l. $+y\frac{dx}{dy}\,\mathrm{Cos.}\,c-y\,\overline{\mathrm{Cos.}\,c}^2$.

— 8 v. u. ſt. $y\frac{dx}{dy}-y\,\mathrm{Cos.}\,c$ l. $y\frac{dy}{dx}-y\,\mathrm{Cos.}\,c$.

— 6 v. u. ſt. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ l. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

139 15 ſt. y^2-2hy l. y^2-2gy.

141 5 ſt. 6=0 l. 5=0.

— 16 ſt. $-\frac{1}{2\pm\sqrt{6}}$ l. $-\frac{1}{2\mp\sqrt{6}}$.

142 12 ſt. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ l. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

— 7 v. u. ſt. $b^2-(x-a)^3$ l. $b^2-(x-a)^2$.

146 8 ſt. von einem der l. von einem der Scheitel.

147 11 ſt. mit y^3 theilbar l. mit y^2 theilbar.

147 17 ſt. $\frac{3az}{z-2}$ l. $\frac{3az}{z^3-2}$.

148 8 v. u. ſt. $x-a$ l. $x=a$.

150 7 ſt. ein ächter l. ein poſitiver ächter

— 4 v. u. ſt. $\pm\sqrt[n]{\overline{(x-a)}^m}$ l. $\pm c\sqrt[n]{\overline{(x-a)}^m}$.

153 19 ſt. es mit l. es ſey mit

154 2 ſt. *T* l. *T'*.

155 11 vor dem Zeichen = ſetze man : $\overline{MR}^2$

— 1 v. u. ſt. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ l. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

159 4 ſt. $a\left(\frac{dy}{dx}\right)$ l. $a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

160 5 ſt. *CP* l. *BP*.

— 8 ſt. *NR* l. *NQ*.

— 13 nach begegnet, leſe man: *Cr* ſenkrecht auf *ct*, und halbirt *rt* in *a*; ſo u. ſ. w.

165 3 ſt. *MM* l. *MM'*.

166 4 ſt. *Cm* l. *CM*.

167 8 ſt. $\left(\frac{du}{dx}$ l. $\left(\frac{du}{dx}\right)^2$.

— 3 v. u. ſt. *PN* l. *MN*.

Seite Lin.

168 3 ſt. $\frac{d^2y}{dx^4}$ l. $\frac{d^2y}{dx^2}$.

170 4 ſt. $\frac{\overline{\Delta x}^2}{1.2.3}$ l. $\frac{\Delta x^3}{1.2.3}$.

173 7 ſt. $\frac{d^2y}{dx^3}$ l. $\frac{d^3y}{dx^5}$.

176 2 ſt. $\frac{ds}{dx}$ l. $\frac{dx}{ds}$.

— 3 ſt. $\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{-\frac{d^2x}{dx^4}}$ l. $\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$.

— 6 ſt. $\left(\frac{ds}{dx}\right)$ l. $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$,

ebendaſelbſt ſt. $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ l. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

176 7 ſt. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ l. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

177 15 ſt. $\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}$ l. $-\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dy}{ds}$.

179 10 ſt. $\left(\frac{du}{dt}\right)$ l. $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$.

182 20 ſt. $\left(\frac{du}{dt}\right)$ l. $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$.

183 6 v. u. ſt. $\left(\frac{ds}{dx}\right)$ l. $\left(\frac{ds}{dx}\right)$.

184 1 v. u. ſt. $-\frac{b^2}{a^2}$ l. $\frac{b^2}{a^2}y^2$.

185 1 ſt. $-\frac{b}{a^2}y^2$ l. $-\frac{b^2}{a^2}y^2$.

186 9 ſt. $\left(\frac{at}{f^2}\right)^3$ l. $\left(\frac{at}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

187 22 ſt. $-\frac{p}{4y^3}$ l. $-\frac{p^2}{4y^3}$.

189 17 v. u. ſt. AP l. MP.

190 15 ſt. MN l. $2MN$.

191 5 ſt. erzeugten l. erzeugenden.

— 12 ſt. $r=0$ l. $v=0$.

— 20 ſt. Sin. v l. $-a$ Sin. v.

— 21 ſt. $-$ Cos. v l. $-a$ Cos. v.

— 6 v. u. ſt. $a-(a-y)^2$ l. $a^2-(a-y)^2$.

193 13 ſt. $u=0$ l. daß $u=0$.

194 16 ſt. $\frac{d^4y}{dx^4}$ l. $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Seite Zin.

196 11 v. u. ſt. CS, CS, l. CS, CS'.

197 6 ſt. CHA l. CKA.

— 24 ſt. 0,43429948 l. 0,43429448.

200 14 ſt. $AbmQ$ l. $Ab'm'Q$.

202 3 ſt. $\frac{1}{4}p$ l. $\frac{1}{4}p^2$.

— 19 ſt. $\frac{1}{4}p$ l. $\frac{1}{4}p^2$.

— 18 ſt. $-2\frac{b^2}{ax}x$ l. $-2\frac{b^2}{a^2}x$.

203 1 v. u. ſt. y^4 l. y^2.

206 3 v. u. ſt. GM l. Gm.

— 2 v. u. ſt. GM l. Gm.

207 14 ſt. $\frac{ds}{dx}$ l. $y\frac{ds}{dx}$.

208 1 ſt. $\frac{a}{b^2}$ l. $\frac{a^2}{b^2}$.

210 12 ſt. πa^2 Sin. c Sec. v l. πa^2 Sin. c Sec. v Tg. v.

212 4 ſt. GDM' l. GDM.

— 20 ſt. GM l. GM'.

213 8 v. u. ſt $\pi d. x^2$ l. $\pi d. xy^2$.

214 8 ſt. E in e l. E und e.

— — ſt. pm l. Pm.

— 9 ſt. pm l. Pm.

216 2 v. u. ſt. $3x^2$ l. $3x'^2$.

217 2 ſt. $x'^2+xx'+x$ l. $x'^2+xx'+x^2$.

220 10 ſt. $\left(\frac{ds}{dv}\right)$ l. $\left(\frac{ds}{dv}\right)^2$.

223 1 ſt. $\left(\frac{dz}{dv}\right)$ l. $\left(\frac{dz}{dv}\right)^2$.

— 4 ſt. $\left(\frac{dz}{dv}\right)$ l. $\left(\frac{dz}{dv}\right)^2$.

— 8 ſt. $\left(\frac{ds}{dv}\right)$ l. $\left(\frac{ds}{dv}\right)^3$.

224 2 v. u. ſt. $\left(\frac{dz}{dv}\right)$ l. $\left(\frac{dz}{dv}\right)^2$.

225 12 v. u. ſt. 79ſten. l. 69ſten.

227 2 v. u. ſt. MFn, AFM l. MFn, AFa.

228 11 ſt. AFM' l. $A'FM'$.

230 19 ſt. $\frac{1}{2}b^2$ Tg. c l. $\frac{1}{2}b^2c$

231 15 ſt. x l. v.

— 23 ſt. $9a^2$ Sin. v l. $9a^2\overline{\text{Sin. } v}^2$.

232 8 muß der gebrochene Exponent $= \frac{3}{2}$ ſeyn.

233 14 ſt. dy l. $\frac{dy}{dx}$.

235 17 ſt. §. 59. l. §. 39.

237 2 v. u. ſt. $x+1$ l. $x+7$.

238 2 ſt. $x-4$. l. $x+4$.

240 1 ſeße man den Zähler des zweyten Bruches $= z'$.

241 2 ſt. Y l. Y'.

— 9 ſt. $(p(x-a')\ldots$ l. $(p(x-a')^{p-1}$

— 15 ſt. $(p(a-a')\ldots$ l. $p(a-a')^{p-1}$

Seite Lin.

241 15 ſt. $(a-a')^p\,(a-a'')$ l. $(a-a')^p\,(a-a''')$

242 21 ſt. $(x-a^5$ l. $(x-a)^5$.

243 9 ſt. $Kx^{(m-1)}$ l. $K^{(m-1)}x$.

— 2 v. u. ſt. $\frac{1}{4}p$ l. $\frac{1}{4}p^2$.

244 10 nach der Formel ſchalte man die Worte ein: zu finden,

248 4 ſt. des zweyten = l. +

— 22 ſt. $U'-(A'x+B')$ l. $U'-((A'x+B')+$

250 6 ſt. $\pm$ Sin. $z\sqrt{-1}$ l. $\pm q$ Sin. $z\sqrt{-1}$.

254 14 ſt. $\pm$ Sin. $\sqrt{-1}$ l. $\pm$ Sin. $z\sqrt{-1}$.

— 3 v. u. ſt. Sin. $(-1)z$ l. Sin. $(r-1)z$.

255 4 v. u. ſt. x^2 l. x^4.

257 3 ſt. p l. r.

258 8 ſt. §. 110. l. §. 113.

— — ſt. *Arc.* Tg. u l. $\frac{5}{8}$ *Arc.* Tg. u

— 10 ſt. a^2-x^2 l. $ax-x^2$.

259 3 ſt. $\left(\frac{x}{a}\right)$ l. $\left(\frac{x}{a}\right)^2$

260 6 ſt. $-dx$ l. dx.

— 13 ſt. $\pm ax$ l. $\pm 2ax$.

— 1 v. u. ſt. $\left(\frac{a}{a}\right)^2$ l. $\left(\frac{a}{x}\right)^2$.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

262 7 ſt. $\sqrt{x^2-a^2}$ l. $x\sqrt{x^2-a^2}$.

— 12 ſt. 2 *Arc.* Tg. l. $\frac{2}{a}$ *Arc.* Tg.

— 13 ſt. *Arc.* Sec. l. $\frac{1}{a}$ *Arc.* Sec.

263 1 v. u. ſt. u l. u^2.

— 7 ſt. Cos. u l. a Cos. u.

264 3 ſt. §. 108. l. §. 123.

— 9 ſt. §. 108. l. §. 123.

265 13 ſt. $x^2 \pm a^2$ l. $x^2 \pm 2ax$.

— 15 ſt. ſtreiche man im Nenner des lezten Glieds den Factor x aus.

266 5 v. u. ſt. kax^{n-1} l. kax^{k-1}.

267 7 v. u. ſt. $m+1+p$ l. $m+1+np$.

268 4 v. u. ſt. $\mp\frac{r-1}{r}$ l. $\frac{(r-1)a^2}{r}$.

269 1 v. u. ſt. v^2 l. a^2.

270 4 ſt. $\sqrt{1-x}$ l. $\sqrt{1-x^2}$.

271 2 ſt. $\sqrt{1-x^4}$ l. $\sqrt{1-x^2}$.

— 7 v. u. ſchiebe man den Factor $\left(1-\frac{1}{49}\right)$ ein.

272 2 ſt. $\frac{\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{r+2}$ l. $\frac{x^{r+1}\sqrt{x^2 \pm 2ax}}{r+2}$.

— 8 ſt. $r=1$ l. $r+1$.

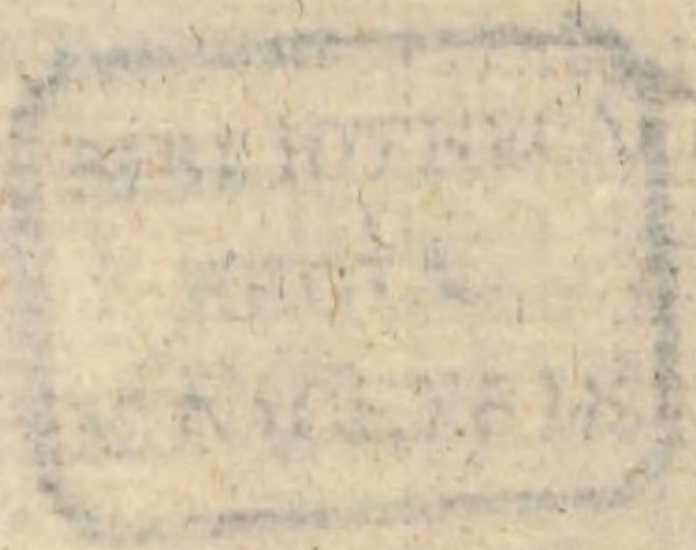
273 16 ſt. $Bx\,Cx^2$ l. $Bx+Cx^2$.

285 19 ſt. Sin. φ l. Sin. v.

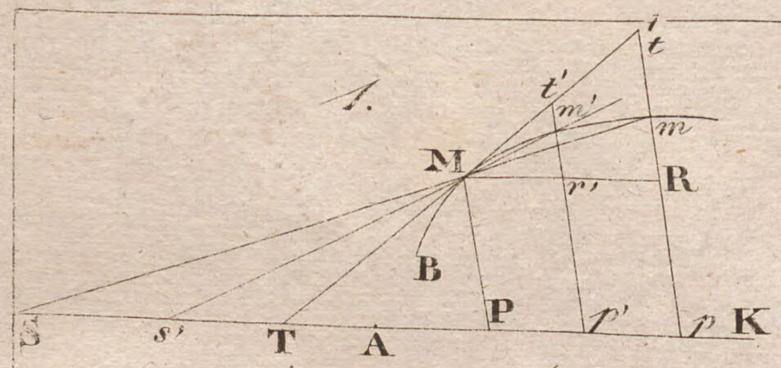
289 6 ſt. $\overline{\text{Cos. } v}^2$ l. $\overline{\text{Cos. } v}^n$.

296 1 v. u. ſt. e^n l. e^u.

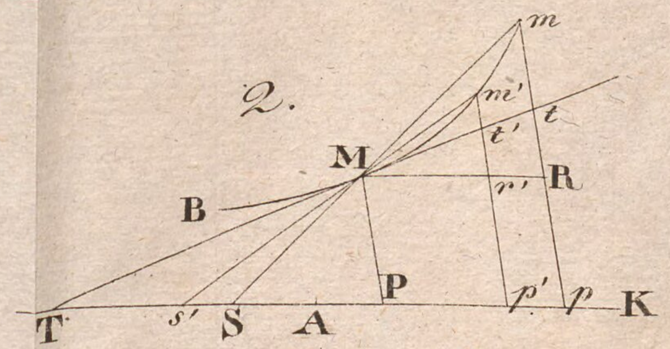
337 1 ſt. $\frac{dv}{dx}$ l. $\frac{dy}{dx}$.



1.

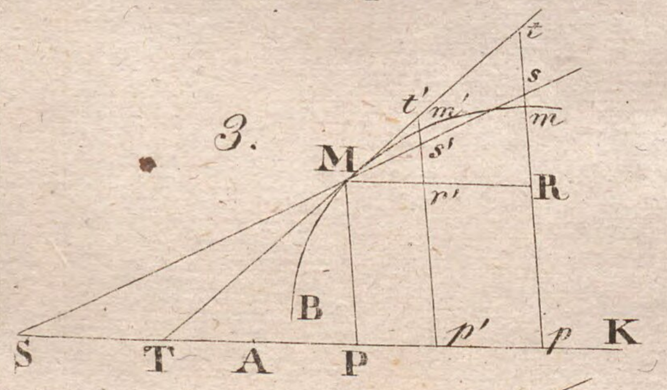


2.

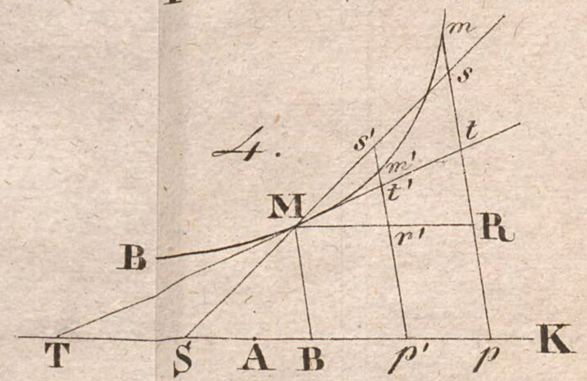


5.

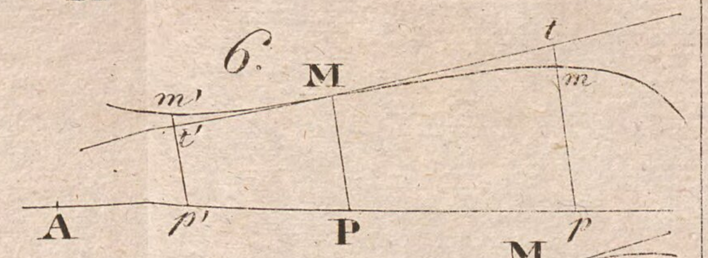
3.



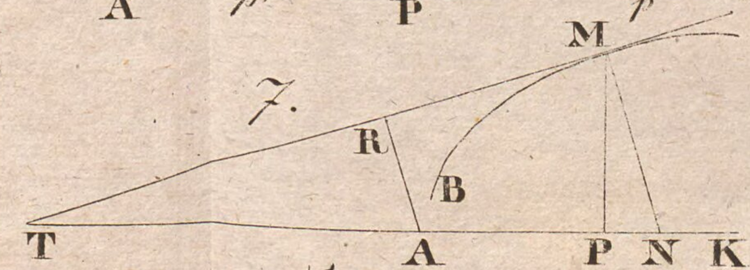
4.



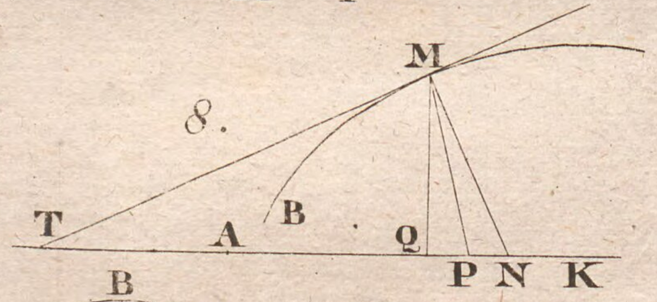
6.



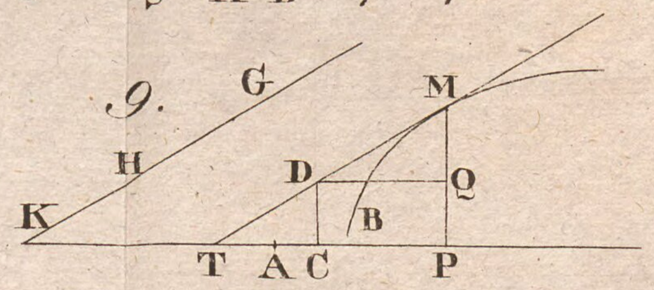
7.



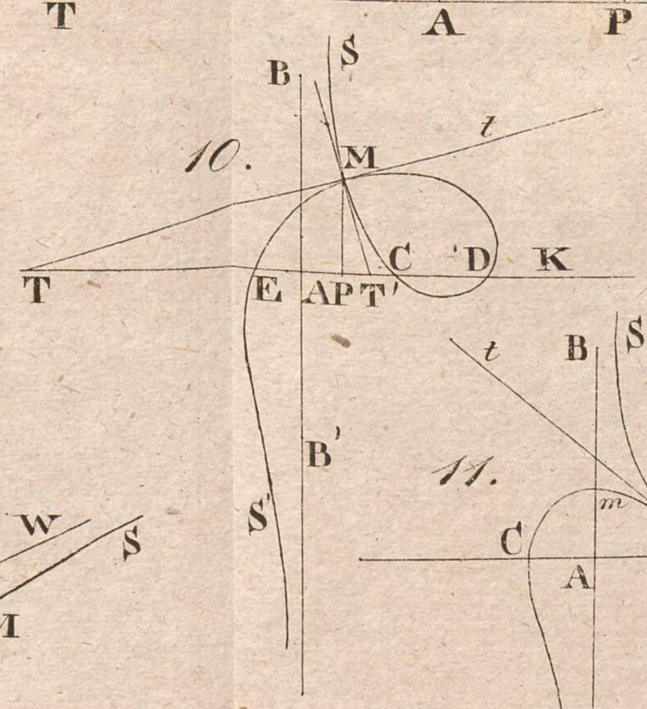
8.



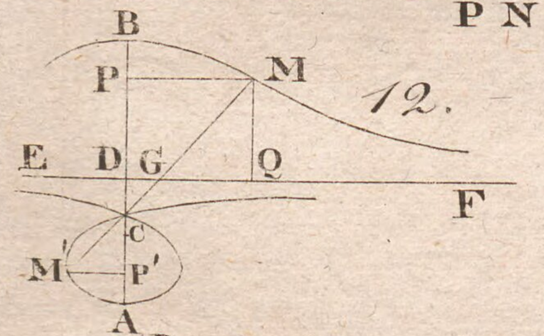
9.



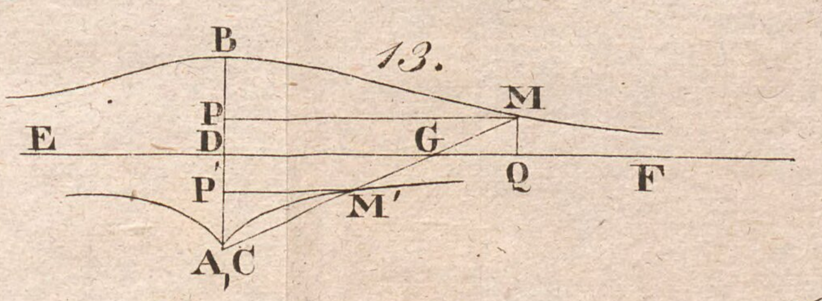
10.



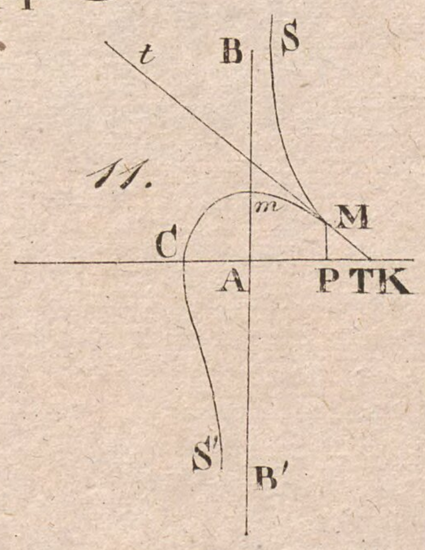
12.



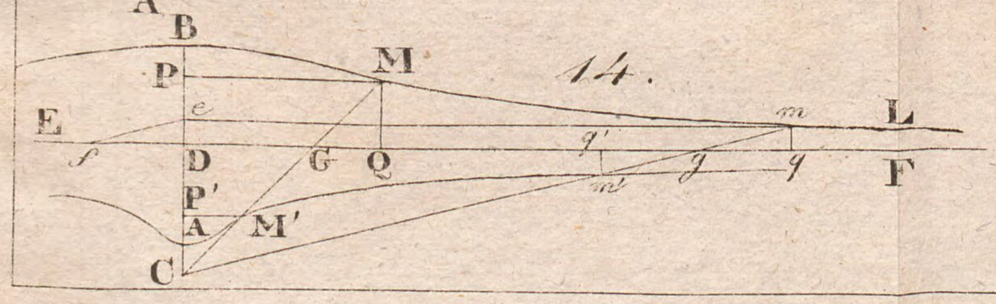
13.



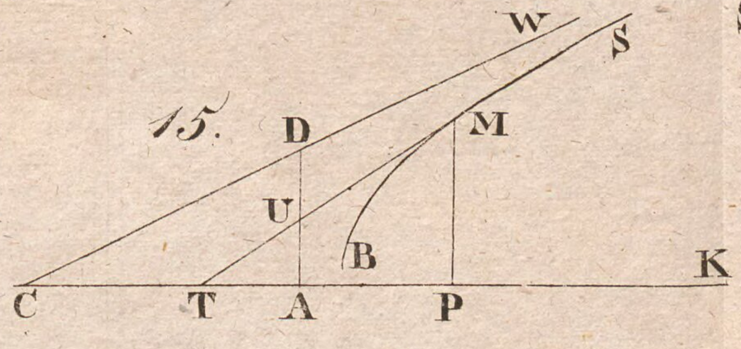
11.



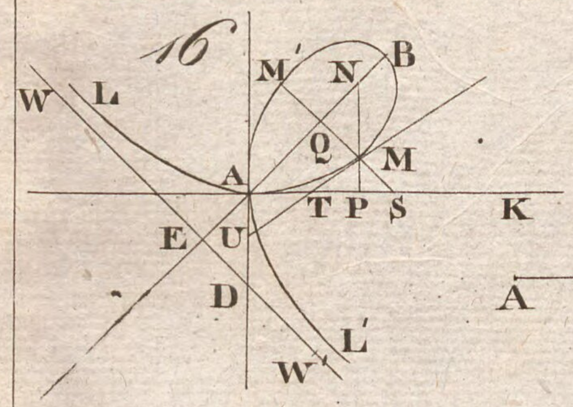
14.



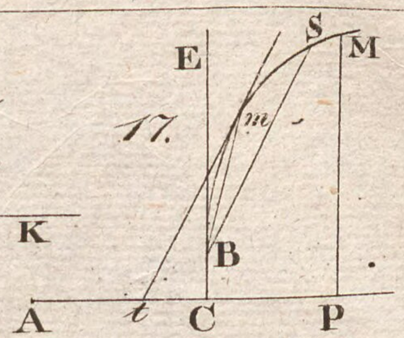
15.



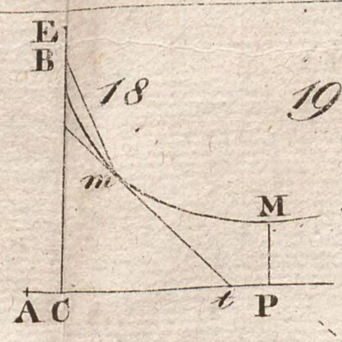
16



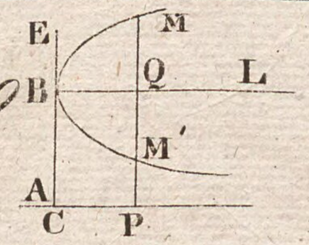
17.



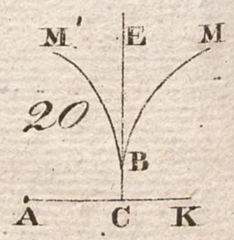
18



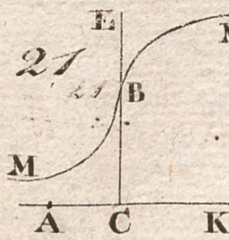
19



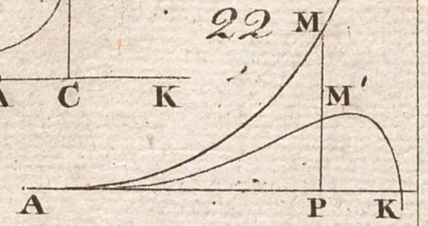
20



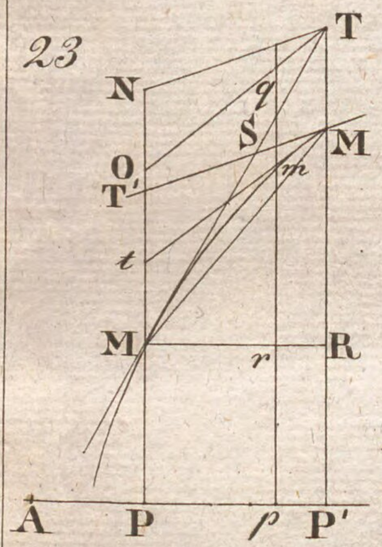
21



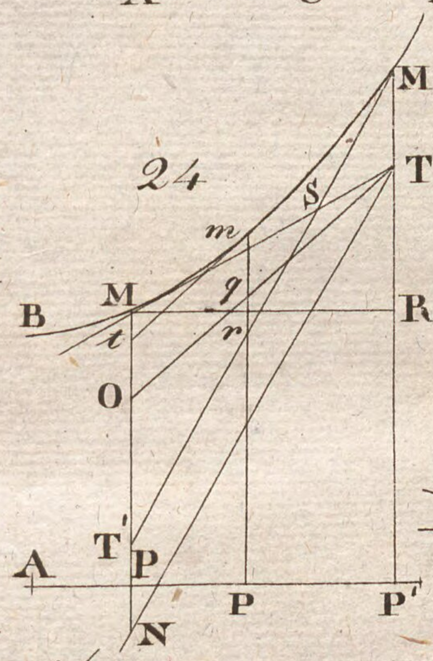
22



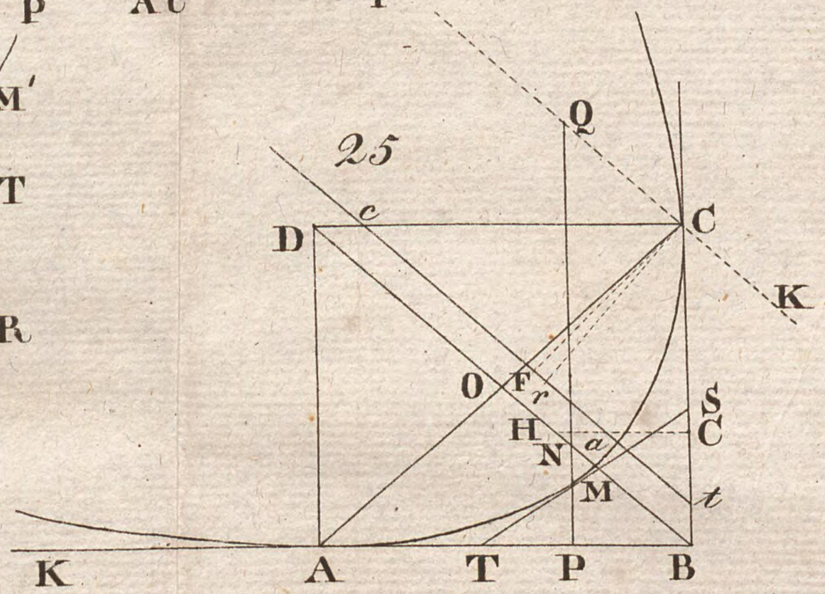
23



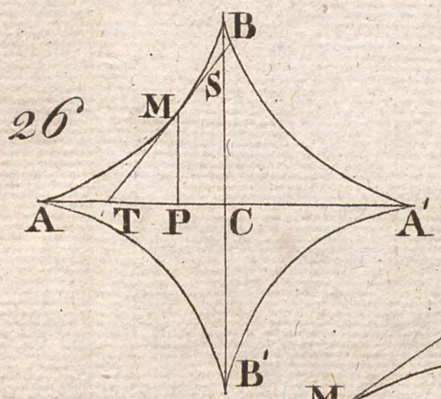
24



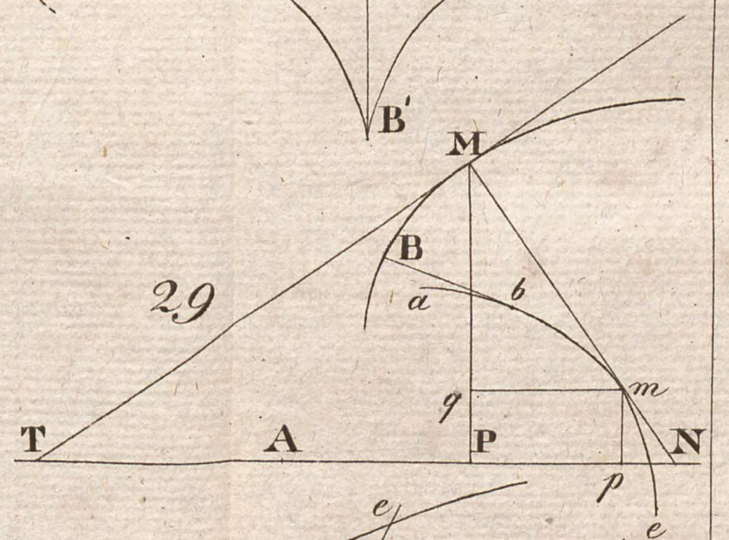
25



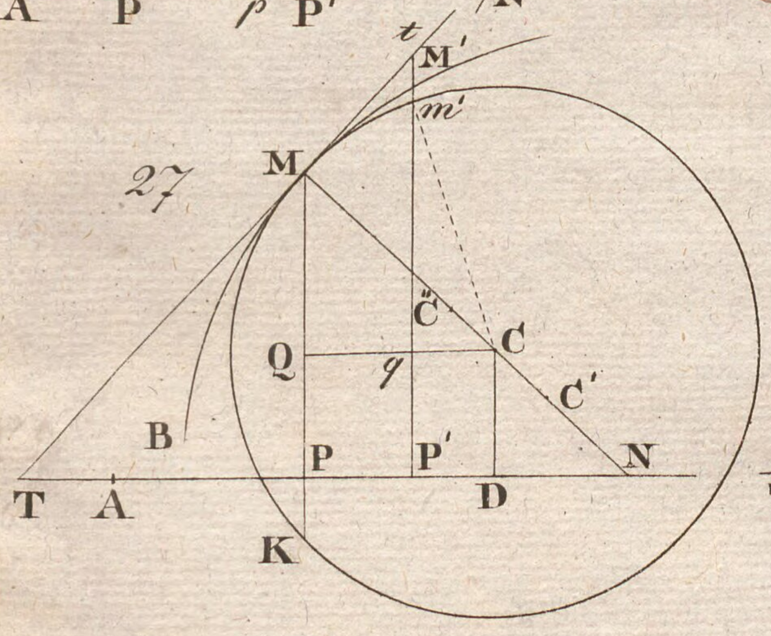
26



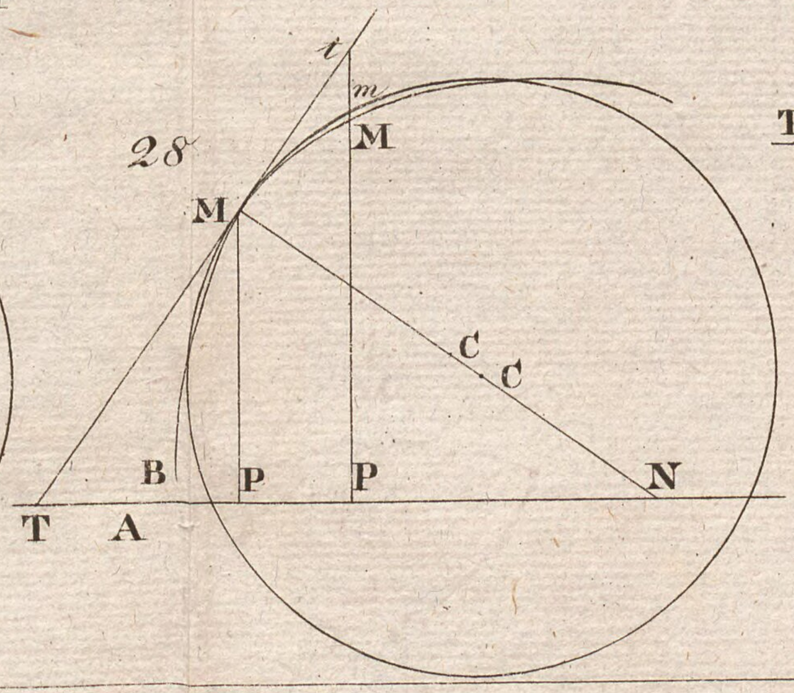
29



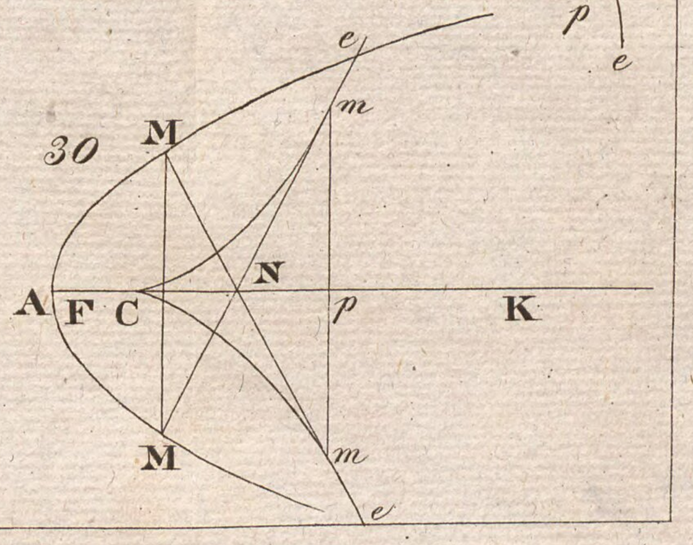
27

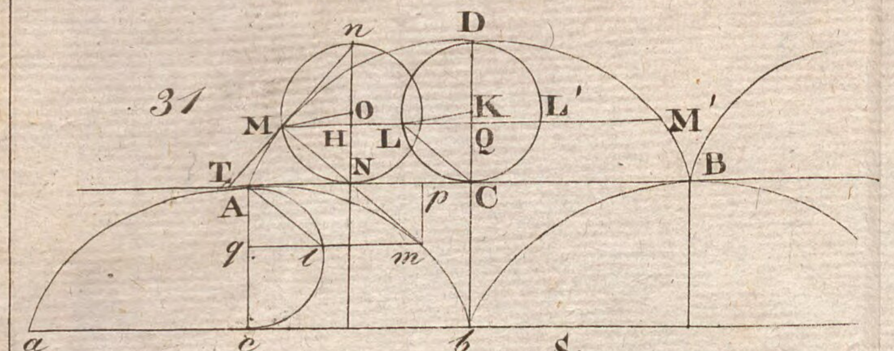


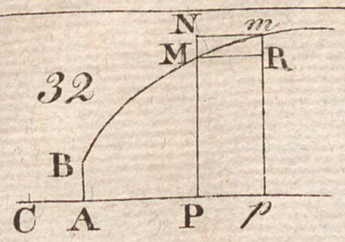
28

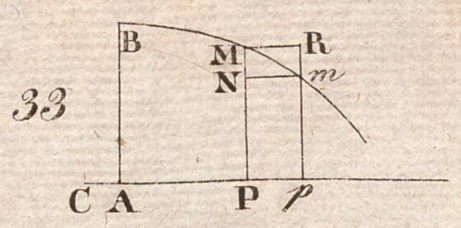


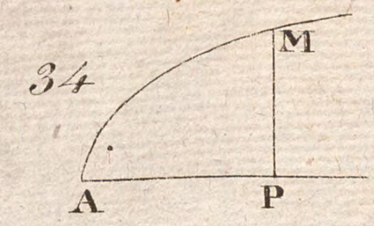
30

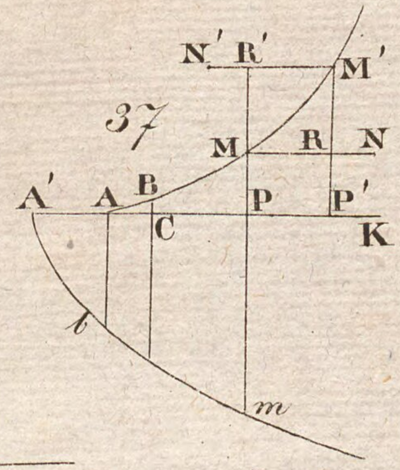


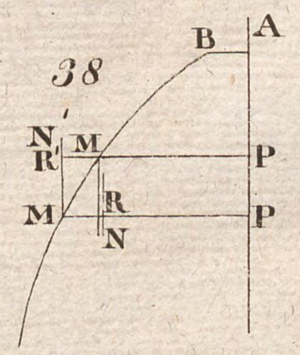

31
n
D
M
O
K
L'
M'
H
L
Q
N
T
B
A
p
C
q
t
m
a
c
b

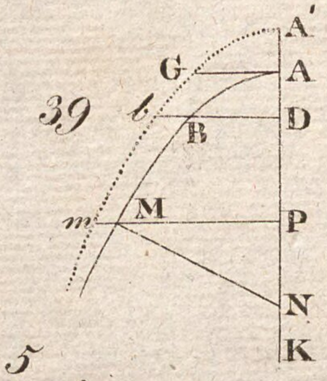

32
N
m
M
R
B
C
A
P
p

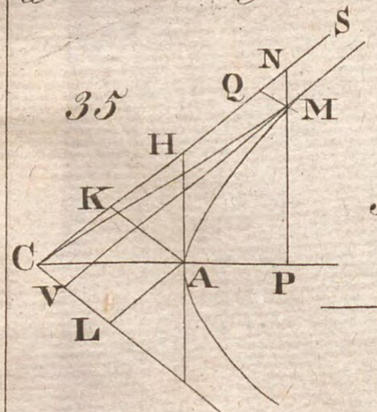

33
B
M
R
N
m
C
A
P
p

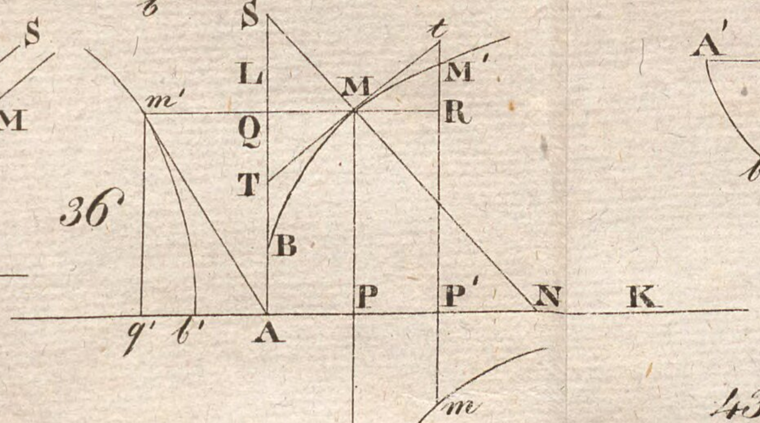

34
M
A
P

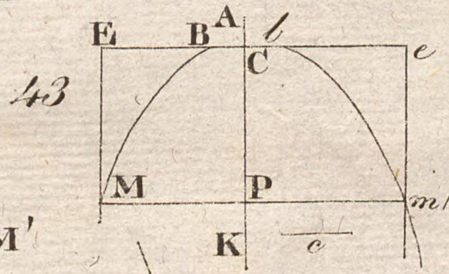

37
N'
R'
M'
M
R
N
A'
A
B
P
P'
K
C
b
m

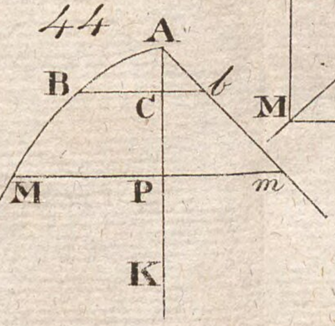

38
B
A
N'
M
R
P
M
R
N
P

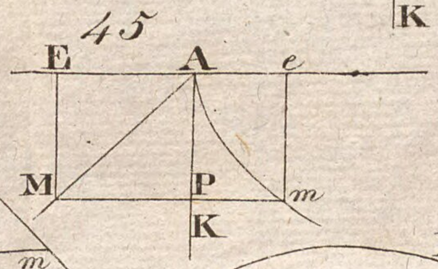

39
A'
G
A
t
B
D
m
M
P
N
K

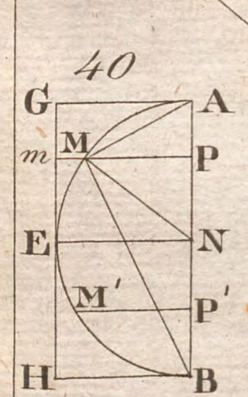

35
S
N
Q
M
H
K
C
A
P
V
L

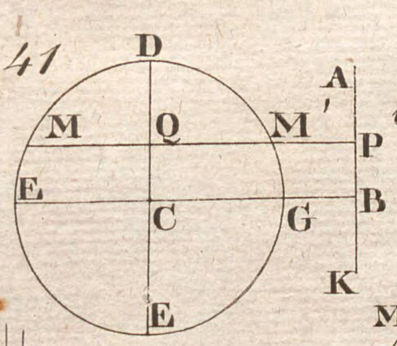

36
S
t
m'
L
M
M'
Q
R
T
B
q'
b'
A
P
P'
N
K

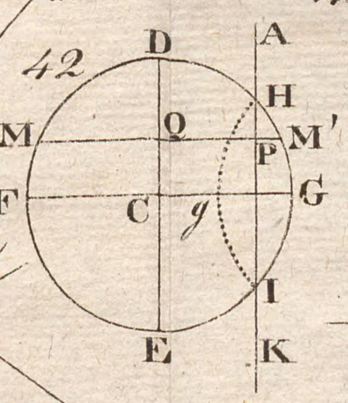

43
E
B
A
t
C
e
M
P
m
K
c

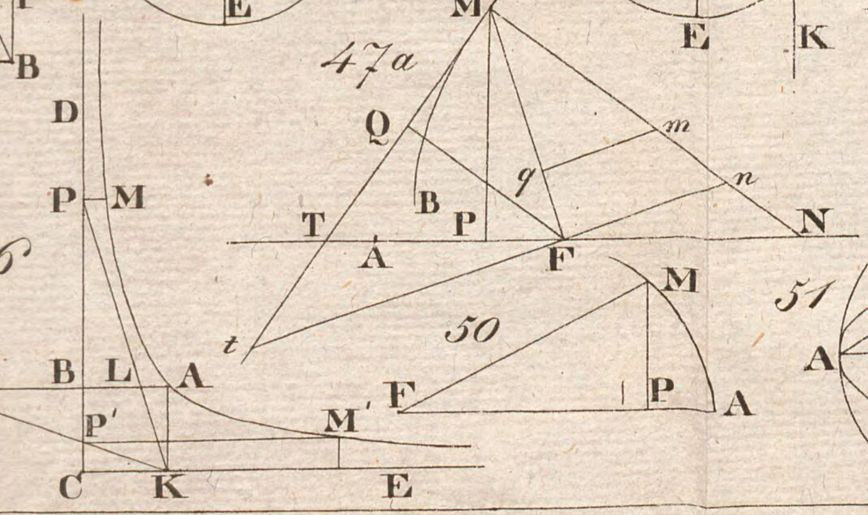

44
A
B
t
C
M
P
m
K

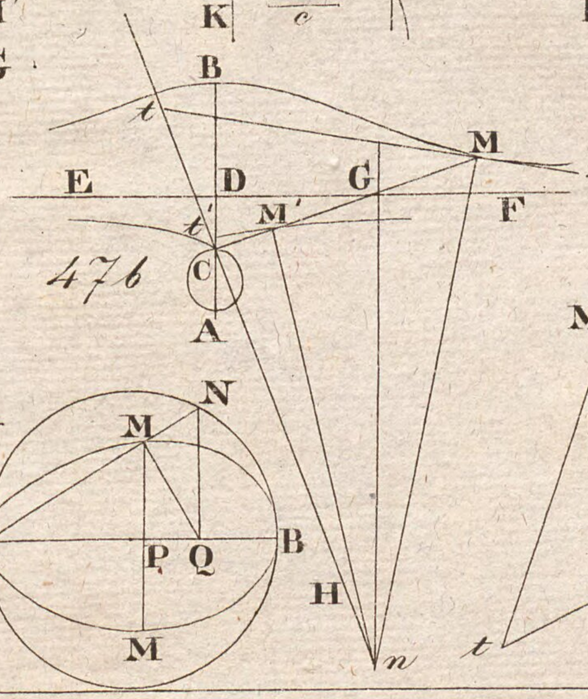

45
E
A
e
M
P
m
K

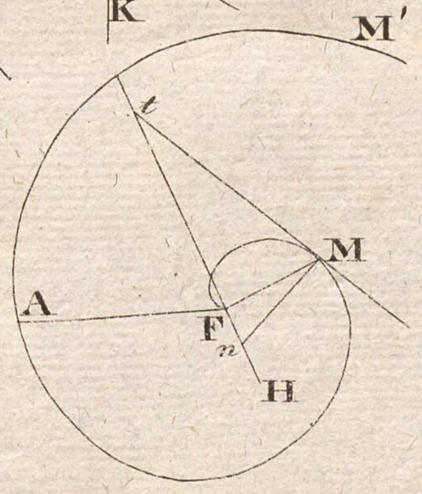

40
G
A
m
M
P
E
N
M'
P'
H
B

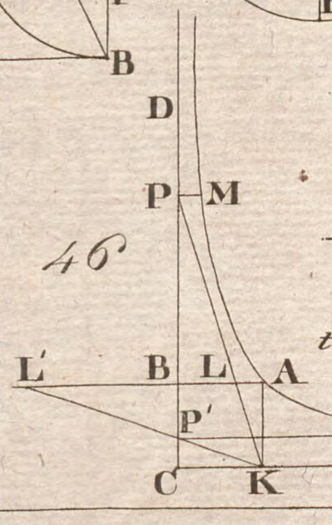

41
D
A
M
Q
M'
P
E
C
G
B
K
E


42
D
A
H
M
Q
M'
P
F
C
g
G
I
E
K

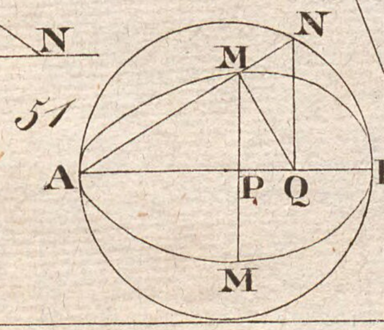

47a
M
D
Q
m
P
M
q
n
T
B
P
A
F
N
t

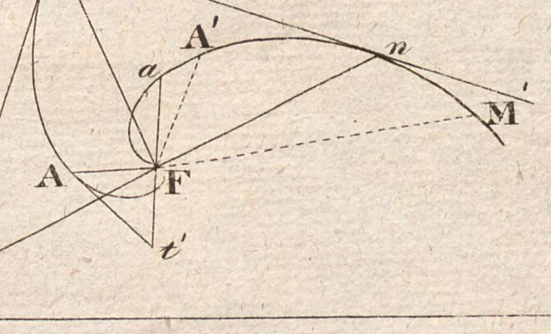

47b
B
t
M
E
D
G
F
t'
M'
C
A
H
n


48
t
M
A
F
n
H


46
D
P
M
L'
B
L
A
P'
M'
C
K
E

50
M
F
P
A


51
N
M
A
P
Q
B
H
M


49
M
A'
a
n
M'
A
F
t'
t

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bohnenberger, Johann G. F.,

Anfangsgründe der höhern Analysis

Tübingen 1811

Math.p. 46
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081477-8